

Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dip. di Scienze Statistiche e Matematiche “Silvio Vianelli”

Appunti del corso di Matematica Generale

Funzioni convesse su intervallo

Anno Accademico 2011/2012

V. Lacagnina - S. Piraino

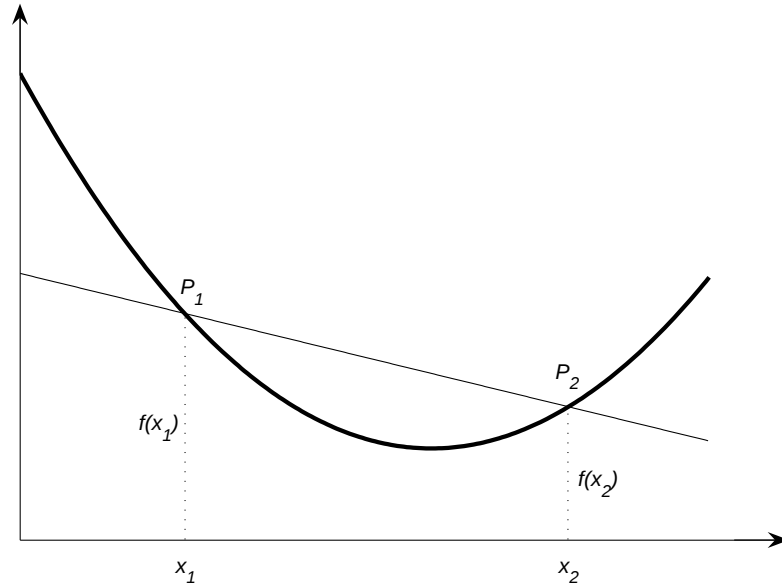
Homines, dum docent, discunt
Quando insegnano, gli uomini imparano
SENECA

1. Definizione di funzione convessa

Sia f una funzione definita su un intervallo I , aperto o chiuso, limitato o illimitato.

Una funzione di $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *convessa* se, considerato un qualsiasi intervallo $[x_1, x_2] \subseteq I$, il valore che la funzione assume in corrispondenza dei punti di tale intervallo è non maggiore del valore che gli stessi punti ricevono dall'equazione della corda congiungente i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Come si può vedere dal grafico, nel generico intervallo $[x_1, x_2] \subseteq I$, il grafico della funzione sta non al di sopra del grafico della corda.



In termini analitici, scritta l'equazione della retta passante per P_1 e P_2

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

detto x il generico punto dell'intervallo $[x_1, x_2]$, imponiamo

$$f(x) \leq y$$

ossia

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Pertanto possiamo dire che f è convessa su I quando, $\forall x_1, x_2 \in I$ si ha:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \forall x \in [x_1, x_2] \quad (1)$$

Alla disuguaglianza precedente possiamo dare un'altra forma. Esprimiamo l'elemento generico $x \in [x_1, x_2]$ in funzione degli estremi dell'intervallo attraverso la relazione parametrica

$$x = x_2 - t(x_2 - x_1) = tx_1 + (1 - t)x_2 \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

sostituiamo x nella relazione precedente

$$\begin{aligned} & f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq \\ & \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - t(x_2 - x_1) - x_1) = \\ & = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}((x_2 - x_1) - t(x_2 - x_1)) = \\ & = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\cancel{x_2 - x_1}}(1 - t)\cancel{(x_2 - x_1)} = \\ & = f(x_1) + (f(x_2) - f(x_1))(1 - t) = \\ & = f(x_1) + f(x_2)(1 - t) - f(x_1)(1 - t) = \\ & = \cancel{f(x_1)} + f(x_2)(1 - t) - \cancel{f(x_1)} + tf(x_1) = \\ & = tf(x_1) + f(x_2)(1 - t) \end{aligned}$$

In conclusione:

una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa in I quando, $\forall x_1, x_2 \in I$ e $\forall t \in [0, 1]$, sussiste la relazione

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \quad (2)$$

La funzione f è detta *strettamente convessa* se la precedente disuguaglianza (2) vale in senso stretto $\forall x_1, x_2 \in I$ e $\forall t \in]0, 1[$.

1.1. Esempio di applicazione della formula per le funzioni convesse. Dimostriamo che la funzione $y = x^2$ è strettamente convessa.

$$(tx_1 + (1 - t)x_2)^2 < tx_1^2 + (1 - t)x_2^2 \quad \text{con } t \in]0, 1[\quad (3)$$

Sviluppando il quadrato e portando tutto a primo membro si ottiene

$$t^2x_1^2 + (1 - t)^2x_2^2 + 2t(1 - t)x_1x_2 - tx_1^2 - (1 - t)x_2^2 < 0$$

Mettiamo in evidenza tra il 1° e 4° addendo tx_1^2 e tra il 2° e il 5° addendo $(1 - t)x_2^2$, ossia

$$tx_1^2(t - 1) + (1 - t)x_2^2(1 - t - 1) + 2t(1 - t)x_1x_2 < 0$$

e, mettendo in evidenza $t(t - 1)$

$$t(t - 1)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) < 0$$

e quindi, in definitiva

$$t(t-1)(x_1-x_2)^2 < 0$$

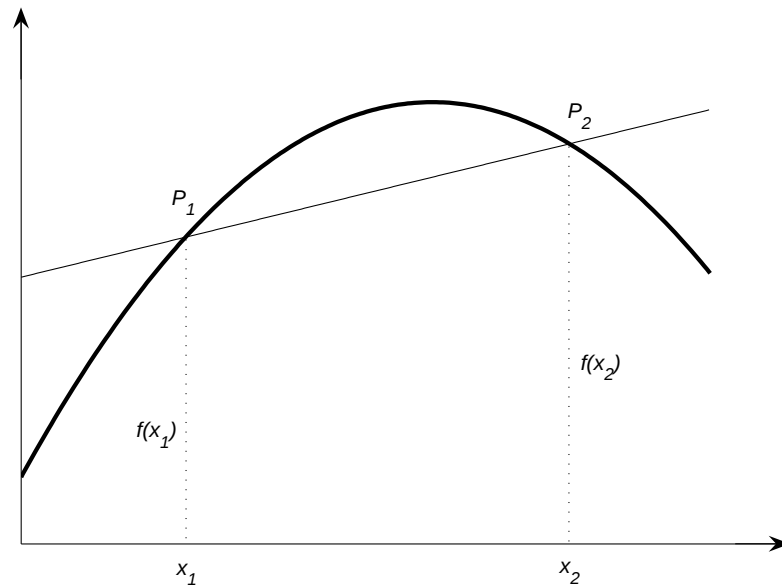
Essendo questa espressione sempre negativa $\forall x_1, x_2 \in I$ e $\forall t \in]0, 1[$, la (3) è sempre verificata e pertanto la funzione è strettamente convessa in $\mathbb{R}$.

2. Definizione di funzione concava

Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, si dice *concava* in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ e $\forall t \in [0, 1]$ vale la seguente disuguaglianza:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad (4)$$

Se la disuguaglianza vale in senso stretto si dirà che la funzione è *strettamente concava*.



3. Proprietà delle funzioni convesse e concave

Le funzioni convesse godono delle seguenti proprietà:

- una funzione convessa definita su un intervallo $I = [a, b]$, chiuso e limitato, è ivi limitata, tanto superiormente che inferiormente;
- una funzione convessa su un intervallo I risulta continua in ogni punto interno di I ;
- una funzione convessa su un intervallo I ammette in ogni punto interno dell'intervallo derivata destra e derivata sinistra.

Essendo una funzione f convessa se e solo se $-f$ è concava, le proprietà enunciate valgono anche per le funzioni concave.

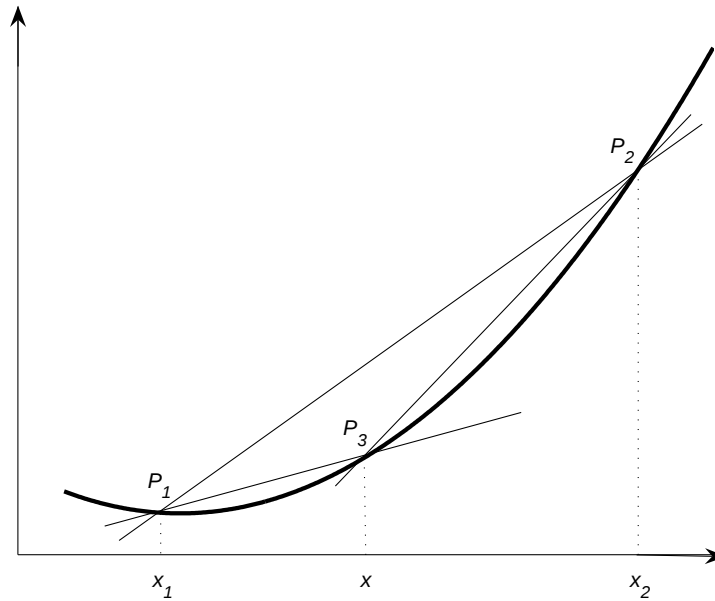
4. Convessità e derivata

Ci siamo resi conto dall'esempio (1.1) che il riconoscimento della convessità (concavità) utilizzando la definizione non è semplice. In aiuto ci viene la derivata. A tal fine supponiamo che la funzione sia derivabile, allora

TEOREMA 4.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione f sia convessa in $[a, b]$ è che la funzione derivata sia non decrescente in $[a, b]$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che se f è convessa allora necessariamente la derivata è non decrescente.

Facciamo riferimento alla figura:



Considerando i coefficienti angolari delle rette $\overline{P_1P_3}$, $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_3P_2}$, essi sono legati dalla seguente relazione

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (5)$$

Facendo tendere x a x_1 , il primo rapporto tende alla derivata in x_1 , mentre facendo tendere x a x_2 l'ultimo rapporto tende alla derivata

in x_2 . Essendo la (5) vera per ogni x compreso tra x_1 e x_2 possiamo scrivere:

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

da cui

$$f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

ossia $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, con $x_1 < x_2$, $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

Quindi la derivata è non decrescente.

Dimostriamo la condizione sufficiente.

Poniamo per ipotesi che la derivata sia non decrescente e applichiamo il teorema di Lagrange agli intervalli $[x_1, x]$ e $[x, x_2]$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x'_0), \quad x'_0 \in]x_1, x[$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x''_0), \quad x''_0 \in]x, x_2[$$

Essendo $x'_0 < x''_0$ segue dall'ipotesi che $f'(x'_0) < f'(x''_0)$; la stessa relazione sussiste per i primi membri

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

da cui

$$(f(x) - f(x_1))(x_2 - x) \leq (f(x_2) - f(x))(x - x_1)$$

Isoliamo a primo membro $f(x)$

$$f(x)(x_2 - x) + f(x)(x - x_1) \leq f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1)$$

da cui

$$f(x)(x_2 - x + x - x_1) \leq f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1)$$

addizioniamo e sottraiamo al 2° membro $f(x_1)(x - x_1)$

$$f(x)(x_2 - x_1) \leq f(x_1)(x_2 - x) + f(x_1)(x - x_1) - f(x_1)(x - x_1) + f(x_2)(x - x_1)$$

mettiamo in evidenza tra i primi due addendi del 2° membro $f(x_1)$ e tra gli ultimi due addendi $(x - x_1)$

$$f(x)(x_2 - x_1) \leq f(x_1)(x_2 - x + x - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))(x - x_1)$$

dividendo per $x_2 - x_1$, si ottiene

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Essendo questa relazione vera $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, la funzione è convessa in $[a, b]$. Si noti che la funzione f è strettamente convessa se e solo se la derivata è crescente. $\square$

5. Convessità e derivata seconda

Sia la funzione f dotata di derivata seconda in $]a, b[$, richiamando il terzo corollario del teorema di Lagrange, possiamo affermare:

- se $f''(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[$ allora f' è crescente in $[a, b]$;
- se $f''(x) < 0 \quad \forall x \in]a, b[$ allora f' è decrescente in $[a, b]$.

Tenendo conto di quanto detto il teorema 4.1 può essere così riformulato.

TEOREMA 5.1. *Sia f una funzione in $[a, b]$ e dotata di derivata seconda nell'aperto $]a, b[$.*

- *Se $f''(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[$ allora f è strettamente convessa in $[a, b]$;*
- *se $f''(x) < 0 \quad \forall x \in]a, b[$ allora f è strettamente concava in $[a, b]$.*

5.1. Funzioni convesse e concave in un punto.

TEOREMA 5.2. *Sia f una funzione derivabile in I e dotata di derivata seconda in un punto $x_0 \in I$.*

- *Se $f''(x_0) > 0$ allora f nel punto x_0 rivolge la concavità verso l'alto;*
- *Se $f''(x_0) < 0$ allora f nel punto x_0 rivolge la concavità verso il basso.*

DIMOSTRAZIONE. Se, ad esempio $f''(x_0) > 0$ allora la $f'(x)$ è crescente in x_0 onde l'affermazione che la f in x_0 rivolge la concavità verso l'alto. $\square$

6. Punto di flesso di una funzione

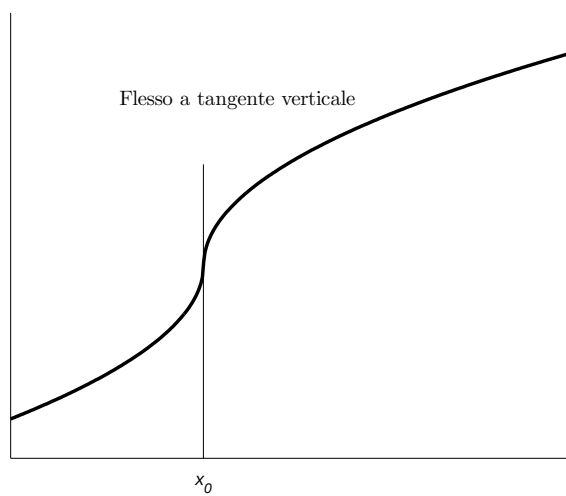
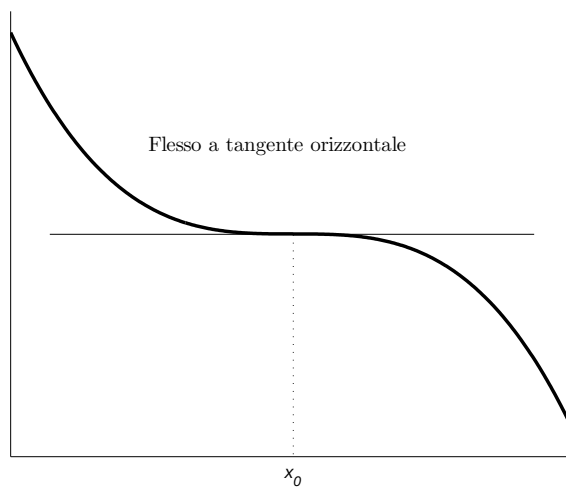
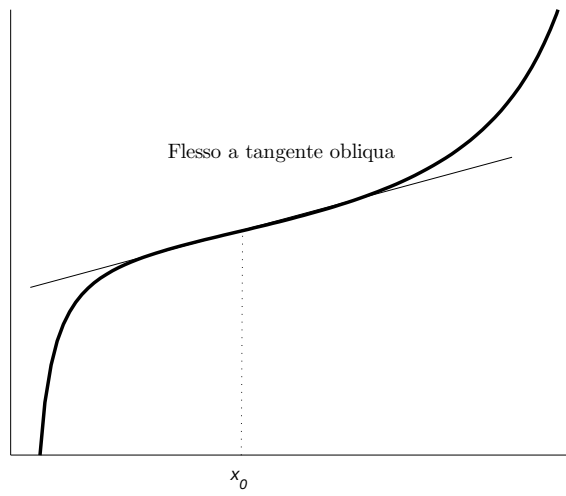
Sia f una funzione definita in I , un punto $x_0 \in \text{int}(I)$ è detto di *flesso* della funzione quando passando attraverso il punto x_0 la funzione cambia di concavità.

Sussistono i seguenti teoremi:

TEOREMA 6.1. *Sia f definita in I e derivabile nell'interno di I . Se in $x_0 \in \text{int}(I)$ la f' ha un punto di massimo o minimo relativo proprio allora il punto x_0 è un punto di flesso proprio.*

TEOREMA 6.2. *Sia f derivabile nell'interno di I e dotata di derivata seconda in un punto $x_0 \in \text{int}(I)$. Se x_0 è un punto di flesso di f necessariamente $f''(x_0) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, essendo, per ipotesi, la funzione dotata di derivata seconda in x_0 , se fosse $f''(x_0) > 0$ la funzione rivolgerebbe nel punto x_0 la concavità verso l'alto, se fosse $f''(x_0) < 0$ la funzione rivolgerebbe nel punto x_0 la concavità verso il basso. Poichè, per ipotesi, x_0 è un punto di flesso, necessariamente $f''(x_0) = 0$. $\square$



Indice

1.	Definizione di funzione convessa	3
2.	Definizione di funzione concava	5
3.	Proprietà delle funzioni convesse e concave	5
4.	Convessità e derivata	6
5.	Convessità e derivata seconda	8
6.	Punto di flesso di una funzione	8