Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
CdS Statistica per l'Analisi dei Dati

Appunti del corso di Matematica

01 - Elementi di Teoria degli Insiemi

Anno Accademico 2013/2014

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Consiglio

1. Introduzione

Il concetto di insieme è un concetto primitivo ossia che non può essere definito mediante altri concetti più semplici. Per tale motivo qualsiasi definizione può essere considerata accettabile.

Di solito, per indicare gli insiemi, si utilizzano le lettere dell'alfabeto latino : A, B, C, ...

Un insieme è formato da *elementi*; esiste un particolare insieme privo di elementi detto *insieme vuoto* e indicato con il simbolo $\varnothing$. Anche i concetti di *elemento* e *insieme vuoto* sono concetti primitivi. Gli elementi di un insieme si indicano con le lettere minusole: a, b, c, ... Se a è un elemento dell'insieme A, si scrive:

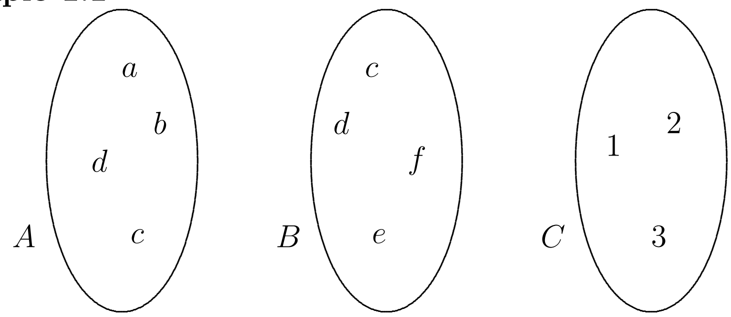
$$a \in A$$

e si dice che *a appartiene all'insieme A*. Se a non è un elemento di A, si scrive

$$a \notin A$$

e si dice che *a non appartiene all'insieme A*. Gli elementi possono essere rappresentati graficamente tramite i cosiddetti *diagrammi di Eulero-Venn*.

Esempio 1.1



Un altro modo per rappresentare gli insiemi è la cosiddetta *rappresentazione tabulare* in cui vengono elencati tutti gli elementi dell'insieme:

$$A = \{a, b, c, d\} \qquad B = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

Diciamo che due insiemi A e B sono *uguali* se hanno gli stessi elementi (l'ordine non ha importanza) e si scrive

$$A = B$$

In caso contratio gli insiemi A e B si dicono *diversi* e si scrive

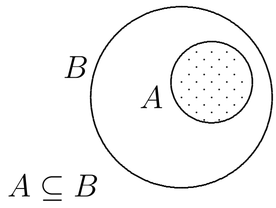
$$A \neq B$$

Si dice che l'insieme A è un *sottoinsieme* dell'insieme B se ogni elemento di A è anche elemento di B. In tal caso si dice che A è *incluso* in B

(oppure che A è *contenuto* in B) e si scrive

$$A \subseteq B$$

Graficamente



In pratica, tutti gli insiemi sono considerati sottoinsiemi di un insieme $U \neq \varnothing$, noto anche come *insieme universo.* In probabilità questo insieme è di solito indicato con Ω e rappresenta l'evento certo.
Nel caso in cui si considerino soltanto sottoinsiemi A diversi da B (come nella figura precedente), si scrive anche

$$A \subset B$$

Per convenzione si assume che l'insieme vuoto sia contenuto in ogni insieme

$$\varnothing \subseteq A$$

e si dice che A è un sottoinsieme *proprio* di B se (i) $A \neq \varnothing$ e (ii) $A \neq B$.

Dalla definizione di inclusione risulta evidente che

$$A \subseteq A$$

ossia, qualunque insieme A è sottoinsieme di se stesso.

Di particolare importanza per la matematica sono i cosiddetti *insiemi numerici.* Indichiamo con

- **$\mathbb{N}$:** l'insieme dei numeri naturali $\{1, 2, 3, \ldots\}$;
- **$\mathbb{Z}$:** l'insieme dei numeri interi $\{\ldots, -2, -1, 0.1, 2, \ldots\}$;
- **$\mathbb{Q}$:** l'insieme dei numeri razionali $\left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$;
- **$\mathbb{R}$:** l'insieme dei numeri reali;
- **$\mathbb{C}$:** l'insieme dei numeri complessi.

Un'importante proprietà dell'inclusione è la *proprietà transitiva* per cui se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, allora $A \subseteq C$. Inoltre, se

$$A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A, \quad \text{allora} \quad A = B$$

Un insieme molto importante, soprattutto in calcolo delle probabilità, è l'*insieme delle parti* di A, che si indica con $\mathcal{P}(A)$, ed è definito come l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di A.

Esempio 1.2
Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$, l'insieme delle parti è

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Nota bene. È importante non confondere il simbolo 1 con il simbolo $\{1\}$: il primo rappresenta l'*elemento di* A, il secondo rappresenta l'*insieme formato dal solo elemento* 1. Nello specifico: $1 \in A$, $\{1\} \subset A$ e $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$.

Si definisce *cardinalità di un insieme finito* il numero dei suoi elementi e si indica con $|A|$ o $card(A)$. È possibile dimostrare che il numero di elementi dell'insieme delle parti è

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Esercizio 1.1

(1) Scrivere in forma tabellare i seguenti insiemi
$A = \{n \in \mathcal{N} : n < 10\}$
$B = \{n \in \mathcal{N} : n \geq 2, n < 12\}$
$C = \{n \in \mathcal{N} : n < 0\}$
$D = \{x \in \mathcal{Z} : -2 \leq x \leq 7\}$

(2) Determinare l'insieme delle parti dei seguenti insiemi
$A = \{0, 3, 5\}$
$B = \{0, \{1, 3\}\}$
$C = \{n \in \mathcal{N} : n \text{ è un numero primo} < 5\}$

2. Operazioni con gli insiemi

Siano A e B due insiemi. Si chiama *intersezione* fra i due insiemi A e B, e si indica con $A \cap B$, il seguente insieme:

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\}$$

In termini più corretti si dovrebbe scrivere che $x \in \Omega$ e $A, B \subseteq \Omega$, dove Ω è l'insieme universo.
Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \varnothing$. Si osservi che se $A \subseteq B$, allora $A \cap B = A$.

Si definisce *unione* fra i due insiemi A e B, e si indica con $A \cup B$, il seguente insieme

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{oppure} \quad x \in B\}$$

Si osservi che se $A \subseteq B$, allora $A \cup B = B$.

L'unione e l'intersezione di due o più insiemi godono di varie proprietà. Le più importanti sono

- *Proprietà associativa* dell'unione e dell'intersezione

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \; (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

- *Proprietà commutativa* dell'unione e dell'intersezione

$$A \cap B = B \cap A, \qquad A \cup B = B \cup A$$

- *Proprietà di idempotenza*

$$A \cap A = A \qquad A \cup A = A$$

- *Proprietà distributiva dell'unione rispetto l'intersezione*

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

- *Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto l'unione*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Sia Ω l'insieme universo, si definisce *insieme complementare*, e si indica con A^c, l'insieme:

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$$

Valgono alcune interessanti proprietà:

- $(A^c)^c = A$
- $A \cup A^c = \Omega$ (*principio del terzo escluso*)
- $A \cap A^c = \varnothing$ (*principio di non contraddizione*)

Dal punto di vista logico, se l'insieme A rappresenta un attributo (l'insieme dei numeri pari), il principio di non contraddizione permette di escludere che il medesimo attributo e la sua negazione appartengano allo stesso oggetto (non esiste un numero che sia pari e dispari allo stesso tempo. Il numero 0 è pari in quanto $2 \cdot 0 = 0$).

3. Il prodotto cartesiano

Una *coppia ordinata* è un insieme di due elementi in cui si tiene conto dell'ordine con il quale si prendono gli elementi dell'insieme. Una coppia ordinata si denota con (a, b). Quindi

$$\{a, b\} = \{b, a\}, \ \text{ mentre } \ (a, b) \neq (b, a)$$

Dati due insiemi A e B, si definisce *prodotto cartesiano* fra A e B (in simboli $A \times B$) l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \ \text{ e } \ b \in B\}$$

Se $A = B$, si è soliti scrivere A^2 invece di $A \times A$.
Si osservi che, in generale, $A \times B \neq B \times A$.

Esempio 3.1
Siano due insiemi $A = \{f, g\}$ e $B = \{\ddot\smile, \ddot\frown\}$. Si ha che

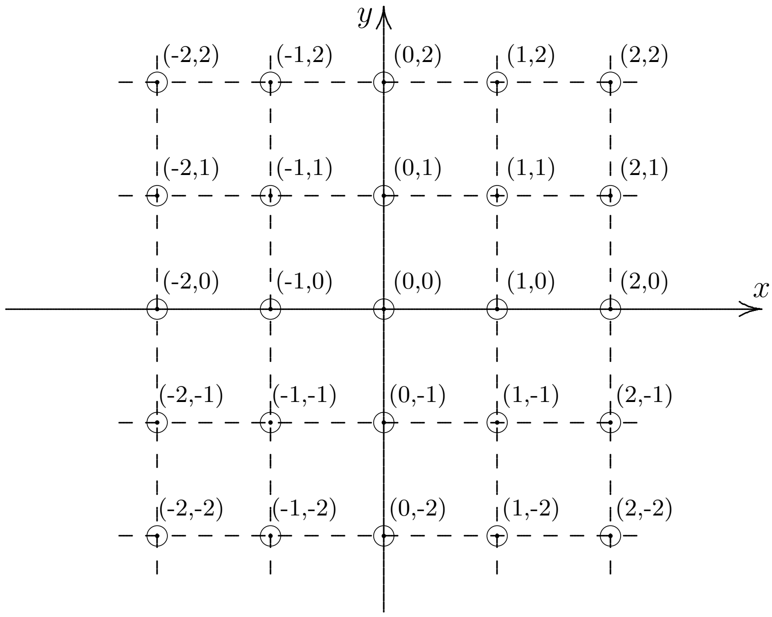
$$A \times B = \{(f, \ddot\smile), (f, \ddot\frown), (g, \ddot\smile), (g, \ddot\frown)\}$$
$$B \times A = \{(\ddot\smile, f), (\ddot\smile, g), (\ddot\frown, f), (\ddot\frown, g)\}$$

Esempio 3.2
Dato l'insieme $A = \{2, 3, 4\}$, si ha che

$$A^2 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

Da un punto di vista grafico, se riportiamo l'insieme A su due assi perpendicolari che si intersecano in $(0, 0)$, A^2 è dato dai punti nel piano di coordinate (x, y). Se l'insieme è $\mathbb{R}$ - l'insieme dei numeri reali - e rappresentiamo $\mathbb{R}$ tramite una retta orientata, allora $\mathbb{R}^2$ è l'insieme delle coppie ordinate (x, y) dove $x \in X$ (*asse delle ascisse*) e $y \in Y$ (*asse delle ordinate*). Geometricamente, il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^3$ rappresenta lo spazio.

Il prodotto cartesiano $\mathbb{Z}^2$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, e si può rappresentare tramite una griglia di punti



4. Le relazioni

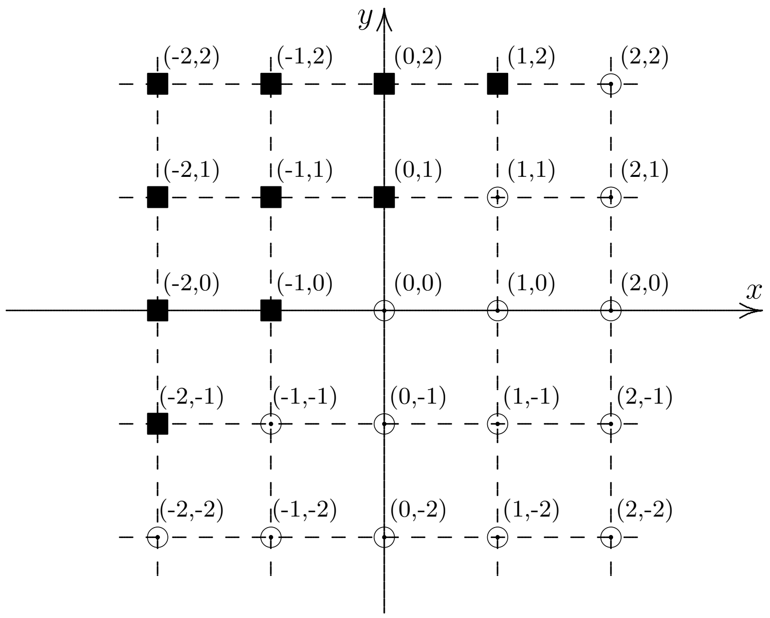
Si definisce *relazione binaria* fra due insiemi A e B un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. In altri termini, una relazione fra gli insiemi A e B è una legge che associa a qualche elemento di A uno o più elementi di B in modo tale che, preso un qualunque elemento $a \in A$ e un qualunque elemento $b \in B$, è possibile stabilire se a e b sono associati dalla relazione oppure no.
Se *a è in relazione con b* scriveremo

$$a\mathcal{R}b$$

Infine, se $A = B$, diremo che $\mathcal{R}$ è una *relazione su A*.

Esempio 4.1

(1) Si consideri l'insieme delle rette del piano. La relazione di parallelismo è una relazione binaria. Infatti, prese due rette è sempre possibile stabilire se sono parallele o no.
(2) Nella figura precedente potremmo selezionare un sottoinsieme di coppie per cui il primo termine è minore del secondo, quindi, $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$, $x\mathcal{R}y$ se $x < y$. Il sottoinsieme del prodotto cartesiano che identifica la relazione *è minore di* è raffigurato dai punti $\blacksquare$



Esercizio 4.1

(1) Dato il prodotto cartesiano A^2, dove

$$A = \{n \in \mathbb{Z} : -3 \leq n \leq 3\}$$

determinare l'insieme relazione

$$a\mathcal{R}b = \{a \text{ è maggiore o uguale di } b\};$$

(2) Per lo stesso prodotto cartesiano, determinare l'insieme relazione

$$a\mathcal{R}b = \{a \text{ e } b \text{ sono numeri pari }\}.$$

Alcune relazioni su un insieme godono di particolari proprietà:

(1) *riflessiva*: se $a\mathcal{R}a$ per ogni $a \in A$;
(2) *simmetrica*: se $a\mathcal{R}b$ allora $b\mathcal{R}a$;

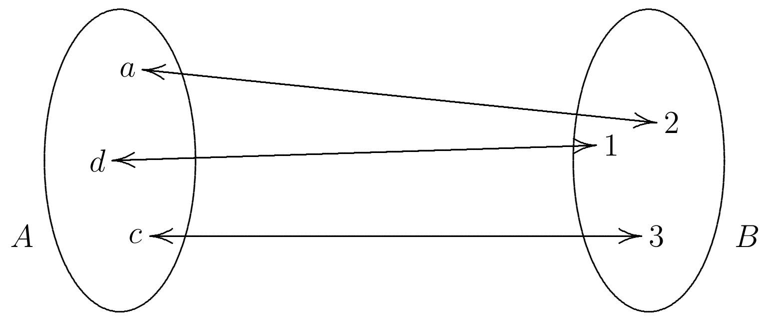
(3) *antisimmetrica*: se $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a$ allora $a = b$;
(4) *transitiva*: se $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$ allora $a\mathcal{R}c$.

Una relazione che verifica le proprietà (1), (2) e (4) è detta *relazione di equivalenza*; un relazione che verifica le proprietà (1), (3), e (4) è detta *relazione d'ordine.*

Esercizio 4.2
Lo studente verifichi che la relazione *è maggiore o uguale di* è una relazione d'ordine e che la relazione *sono numeri pari* è una relazione di equivalenza.

Dati due insiemi A e B, una *corrispondenza biunivoca* è una relazione binaria tra A e B, tale che ad ogni elemento di A corrisponde *uno ed un* solo elemento di B e viceversa.

Graficamente



Riprendiamo adesso il concetto di cardinalità ed estendiamolo al caso di insiemi non finiti.

Definizione Due insiemi A e B si dicono *equipotenti* (o anche che hanno la *stessa cardinalità*) se esiste una corrispondenza biunivoca fra A e B.

Un insieme A si dice *finito* se non può essere messo in corrispondenza biunivoca con alcun suo sottoinsieme proprio. Un insieme A è *infinito* se esiste una corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. Un insieme A si dice *numerabile* se ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali.