Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
CdS Statistica per l'Analisi dei Dati

Appunti del corso di Matematica

03 - I Numeri Reali

Anno Accademico 2013/2014

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Consiglio

1. Introduzione

Fra gli insiemi numerici, i numeri reali rappresentano lo strumento principale per gli studi che affonteremo. Introdurremo i numeri reali in modo assiomatico senza eccedere, comunque, nel formalismo.

1.1. Addizione e moltiplicazione. Si definisce *operazione binaria* su A una legge che associa a ogni coppia ordinata di elementi di A uno ed un solo elemento di A. Quindi, tramite le operazioni binarie a ogni coppia ordinata $(a, b) \in A$ corrisponde l'elemento $c \in A$.
Nell'insieme dei numeri reali, che sarà indicato con $\mathbb{R}$, sono definite due operazioni: l'*addizione* indicata con il segno "+" e la *moltiplicazione* indicata con il segno "$\cdot$". Le due operazione soddisfano le seguenti proprietà:

(1) *Proprietà commutativa dell'addizione e della moltiplicazione*

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

(2) *Proprietà associativa dell'addizione e della moltiplicazione*

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

(3) *Proprietà distributiva*

$$(a + b) \cdot c = ac + bc \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

(4) *Esistenza degli elementi neutri*

$$a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}(\text{elemento neutro dell'addizione})$$

$$a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (\text{elemento neutro della moltiplicazione})$$

(5) *Esistenza degli opposti e dei reciproci*

$$a + (-a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (-a \text{ è l'opposto di } a)$$

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (a^{-1} \text{ è il reciproco di } a)$$

Le proprietà (1) - (5) possono essere considerate per determinare altre proprietà dei numeri reali, utili soprattutto per il calcolo delle frazioni.

1.2. Ordinamento. L'insieme dei numeri reali può essere ordinato, ovvero, è possibile definire una *relazione d'ordine* che indicheremo con il simbolo "$<$".
Tale relazione gode delle seguenti proprietà:

i: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, vale una sola delle seguenti relazioni

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

ii: Se $a < b$ e $b < c$, allora $a < c$
iii: Se $a < b$, allora $\forall c \in \mathbb{R}$, $a + c < b + c$
iv: Se $0 < a$ e $0 < b$, allora $0 < ab$

Talvolta si usa anche la relazione $a \leq b$. Per mezzo di tale relazione d'ordine è possibile definire gli *intervalli*:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

L'insieme dei numeri reali non ha un limite superiore (come $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$) e un limite inferiore (come $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$). Per tale motivo è conveniente aggiungere a $\mathbb{R}$ due punti: $+\infty$ (che semplicemente denoteremo con ∞) e $-\infty$, e definire la relazione d'ordine fra un qualsiasi reale e i cosiddetti *punti all'infinito*, ovvero,

$$-\infty < x < \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Le relazioni aritmetiche fra ∞, $-\infty$ e i numeri reali sono definite di seguito:

a: se $a \in \mathbb{R}$, allora

$$a + \infty = \infty + a = \infty$$

$$a - \infty = -\infty + a = -\infty$$

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$$ [1]

b: se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$$

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$$

c: se $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$$

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$$

d:

$$\infty + \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$

$$-\infty - \infty = \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$

Non è possibile assegnare alcun valore aritmetico alle seguenti forme:

$$\frac{0}{0};\ \ \frac{\infty}{\infty};\ \ 0 \cdot \infty;\ \ 1^{\infty};\ \ 0^0;\ \ \infty^0;\ \ \infty - \infty$$

[1] Quando studieremo i limiti vedremo che, dipendentemente dal segno di a, si parlerà di 0^+ o 0^- in base alla concordanza o discordanza dei segni fra numeratore e denominatore per sottolineare che il processo di convergenza a zero avviene dalla destra o dalla sinistra di 0, rispettivamente.

1.3. Massimi, minimi e estremi di un insieme. Affinchè si possa definire il concetto di massimo e minimo è necessario che nell'insieme sia stata definita una relazione d'ordine. Poichè ci occuperemo prevalentemente di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, possiamo procedere con tali definizioni senza precisare altro.

Dato un insieme non vuoto A, con $A \subset \mathbb{R}$, si dice che $M \in A$ è il *massimo* dell'insieme A se $\forall a \in A$ si ha che $M \geq a$. In modo analogo si definisce $m \in A$ il *minimo* dell'insieme A se $\forall a \in A$ si verifica che $m \leq a$.

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \varnothing$, diremo che A è *limitato superiormente* (*inferiormente*) se esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq \alpha$ ($a \geq \alpha$), $\forall a \in A$. Il numero α è chiamato *maggiorante* (*minorante*) di A.
È evidente che se esiste un α maggiorante (minorante) di un insieme A, qualsiasi altro $\beta > \alpha$ ($\beta < \alpha$) è un maggiorante (minorante) di A. Il più piccolo dei maggioranti prende il nome di *estremo superiore* e si indica con $\sup A$. Analogamente, il più grande dei minoranti prende il nome di *estremo inferiore* e si indica con $\inf A$. Si osservi che se $\sup A \in A$ ($\inf A \in A$) allora esso coincide con il massimo (minimo). Inoltre, se $\sup A = \infty$ ($\inf A = -\infty$) diremo che A è *illimitato superiormente* (*inferiormente*).

Esempio 1.1
Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 10\} \cup \{12\}$ e $B = \left\{ \dfrac{5n-1}{7n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
L'insieme A è limitato superiormente ($\sup A = 12$) ed inferiormente ($\inf A = 2$). Inoltre, $\sup A = \max A = 12$.
L'insieme B è limitato inferiormente ($\inf B = \dfrac{4}{9}$) e superiormente ($\sup B = \dfrac{5}{7}$). Si osservi che $\inf B = \min B = \dfrac{4}{9}$, infatti per $n = 1$ si ottiene il valore di $\dfrac{4}{9} \in B$. Lo stesso non si può dire di $\sup B$. In effetti, è necessaria una definizione più rigorosa per stabilire che $\sup B = \dfrac{5}{7}$.

Definizione Sia $A \subset \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ è $\sup A$ se valgono le seguenti proprietà:

- $\gamma \geq a$, $\forall a \in A$
- $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ a \in A$ tale che $\gamma - \epsilon < a \leq \gamma$

In maniera analoga si può definire $\inf A$

Definizione Sia $A \subset \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$ è $\inf A$ se valgono le seguenti proprietà:

- $\delta \leq a$, $\forall a \in A$
- $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ a \in A$ tale che $\delta \leq a < delta + \epsilon$

Per l'insieme B dell'esempio precedente, si ha che

$$\frac{5n-1}{7n+2} > \frac{5}{7} - \epsilon \Rightarrow \epsilon > \frac{5}{7} - \frac{5n-1}{7n+2} \Rightarrow n > \frac{17-14\epsilon}{49\epsilon}$$

tale che sia verificata la seconda proprietà della definizione di estremo superiore. Infatti già per $\epsilon = 1$ basta fissare $\bar{n} \geq 1 > \frac{3}{49}$. Se fissiamo $\epsilon = 0.0001$ la condizione è verificata a partire da $\hat{n} \geq 3470$.
Utilizzando la definizione di estremo superiore e inferiore di un insieme, nel caso degli intervalli avremo che

Intervalli chiusi	$[a,\infty)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
non limitati	$(-\infty,a]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
Intervalli aperti	(a,∞)	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
non limitati	$(-\infty,a)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Utilizzando le proprietà della somma e prodotto di due numeri reali e la relazione d'ordine è possibile dimostrare che

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

I numeri razionali, ossia quei numeri definiti come $a = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, non sono sufficienti per gli scopi del nostro orso. In particolare, tale limitatezza deriva dal seguente teorema:

Teorema 1.1. *Non esiste alcun numero razionale tale che* $x^2 = 2$.

Dimostreremo tale teorema in seguito. Occorre pertanto definire una ulteriore proprietà dell'insieme dei numeri reali che permette di ottenere l'operazione di estrazione di radice. Tale proprietà si chiama *Assioma di Dedekind.* L'assioma di Dedekind assicura che, nel campo dei reali, esiste un numero reale positivo il cui quadrato è 2. I numeri reali, non razionali, ossia che non si possono ottenere tramite una frazione del tipo $\frac{p}{q}$, sono detti *numeri irrazionali.* Per esempio, $\sqrt{2}$, e, π sono numeri irrazionali.

2. Il valore assoluto

Dato $x \in \mathbb{R}$, si definisce il *valore assoluto* di x (in simboli $|x|$) nel seguente modo:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

oppure

$$|x| = \max(-x, x)$$

Esempio 2.1

$$|4| = 4,\ |-5| = 5,\ |x^2| = x^2$$

Il valore assoluto soddisfa le seguenti proprietà:

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$ se $y \neq 0$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Disuguaglianza triangolare)

Dal punto di vista geometrico, l'insieme dei numeri reali può essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta orientata.

Teorema 2.1. *L'insieme dei numeri reali non è numerabile.*

Questo famoso teorema, che non dimostreremo, definisce insiemi numerici infiniti che, però, non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Tali insiemi hanno la *potenza del continuo.*

Definizione Si definisce *intorno* di un punto $x \in \mathbb{R}$ un qualunque intervallo aperto che contiene il punto x.

Dato un numero reale $r \in \mathbb{R}$, si definisce intorno di ampiezza r, o r-intorno, di un punto $x \in \mathbb{R}$ il seguente insieme:

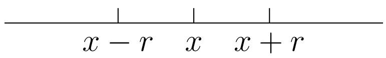
$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < r\}$$

Si osservi che la disequazione con il valore assoluto può essere scritta

$$\begin{cases} y - x < r & \text{se} \quad y - x \geq 0 \\ -(y - x) < r & \text{se} \quad y - x < 0 \end{cases}$$

da cui, $y < x + r$ e $y > y - r$, quindi

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} : x - r < y < x + r\} = (x - r, x + r)$$

Graficamente, 

Definizione Sia $A \subset \mathbb{R}$, un punto $x \in \mathbb{R}$ si dice *punto di accumulazione* per A se $\forall r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, l'intorno $B_r(x)$ contiene infiniti elementi di A.

Si osservi che non è necessario che un punto di accumulazione di A appartenga ad A.

Esempio 2.2
Sia $A = (-1, 3]$. L'insieme dei punti di accumulazione per A è dato da $[-1, 3]$.

Definizione Un insieme A si dice *chiuso* se contiene tutti i suoi (eventuali) punti di accumulazione.

Definizione Sia $A \subset \mathbb{R}$, un punto $x \in \mathbb{R}$ si dice *punto interno* ad A se $\exists r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tale che $B_r(x) \subset A$.

Definizione Un insieme A è detto *aperto* se tutti i suoi punti sono interni ad A.
Da questa definizione si deduce che se A è aperto (contiene tutti i suoi punti interni) allora A^c è chiuso e viceversa.

TEOREMA 2.2. *L'unione di insiemi aperti è un insieme aperto.*

Esempio 2.3
Sia $A = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ un insieme chiuso. L'insieme complementare, A^c, è dato da:

$$A^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

quindi il complementare di A è dato dall'unione di due insiemi aperti, ossia, A^c è aperto e pertanto A è un insieme chiuso.

L'insieme dei reali $\mathbb{R}$ è aperto, in quanto contiene i suoi punti interni (tutti i punti di $\mathbb{R}$ sono interni). Come conseguenza l'insieme vuoto è pertanto chiuso, infatti, il complementare di $\mathbb{R}$ è $\varnothing$. A sua volta, $\varnothing$ è un insieme aperto in quanto esso non contiene punti e, a fortiori, non può contenere i suoi punti di accumulazione. Ne consegue che, il complementare di $\varnothing$, che è $\mathbb{R}$, è chiuso.
$\mathbb{R}$ e $\varnothing$ sono gli unici insiemi aperti e chiusi allo stesso tempo.