Università degli Studi di Palermo

Facoltà di Economia

CdS Statistica per l'Analisi dei Dati

Appunti del corso di Matematica

04 - Numeri Complessi

Anno Accademico 2013/2014

M. Tumminello, V. Lacagnina e A. Consiglio

1. Introduzione

La soluzione di un'equazione di secondo grado

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

è data da

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a},$$

se $b^2 - 4\,a\,c \geq 0$ e $a \neq 0$. Consideriamo ora un caso in cui $b^2 - 4\,a\,c < 0$:

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

Formalmente possiamo scrivere la sua soluzione secondo la formula generale di un'equazione di secondo grado (data sopra) come:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}.$$

Giacché il quadrato di un numero reale e sempre positivo o nullo, $y^2 = c$ implica $c \geq 0\ \forall y \in \mathbb{R}$, nell'esempio specifico non può esistere un numero reale che elevato al quadrato sia uguale a -36. Pertanto l'equazione $x^2 - 4x + 13 = 0$ non ammette soluzioni nel campo dei numeri reali.

Vi sono comunque problemi reali che necessitano di risolvere un' equazione di secondo grado anche nel caso in cui il determinante sia negativo: $b^2 - 4\,a\,c < 0$. Per tanto si è ampliato l'insieme dei numeri reali con il fine di ottenere un insieme numerico che includesse le soluzioni di un'equazione di secondo grado anche nel caso di determinante negativo. Tale insieme prende il nome di **insieme dei numeri Complessi** e si indica con $\mathbb{C}$.

L'artificio che permette di ampliare il campo reali in modo da ottenere i numeri complessi si basa proprio sulla possibilità di estrarre la radice quadrata di un numero negativo. Il primo passo in tal senso consiste nel definire una quantità i, detta *unità immaginaria*, tale che

$$i^2 = -1.$$

Se si estende il campo $\mathbb{R}$ con i, possiamo scrivere (riferendoci all'equazione $x^2 - 4x + 13 = 0$ considerata sopra) che:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{-1 \cdot 36} = \sqrt{i^2 \cdot 36} = i \cdot \sqrt{36} = i\,6.$$

Pertanto l'equazione $x^2 - 4x + 13 = 0$ ammette due soluzioni in campo complesso:

$$x = 2 \pm 3\,i.$$

Lo studente verifichi che, sostituendo $x = 2 \pm 3\,i$ nel membro sinistro dell'equazione $x^2 - 4x + 13 = 0$, questo sia effettivamente uguale a zero.

1.1. Definizione di numero complesso. Un numero complesso z è un numero la cui rappresentazione algebrica è data da

$$z = a + i\,b$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ ed i soddisfa la relazione $i^2 = -1$.
Il numero reale a è chiamato *parte reale* del numero complesso z, in formule $a = Re(z)$, mentre il numero reale b è chiamato *parte immaginaria* del numero complesso z, $b = Im(z)$. Infine, come abbiamo già detto, i è noto con il nome di *unità immaginaria.* Un numero complesso z la cui parte reale è pari a zero, $Re(z) = a = 0$ è detto *numero immaginario* e la sua rappresentazione algebrica è $z = i\,b$.
Per ogni numero complesso $z = a + i\,b$, il numero complesso $a - i\,b$ si dice *complesso coniugato* di z e si indica con $\bar{z}$.

2. Operazioni con i numeri complessi

Anche per i numeri complessi è possibile definire le operazioni binarie di somma e moltiplicazione. In particolare, dati due numeri complessi

$$z_1 = a_1 + i\,b_1 \text{ e } z_2 = a_2 + i\,b_2$$

indicheremo con il segno + l'operazione di addizione e la definiremo come segue:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i\,b_1) + (a_2 + i\,b_2) = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2).$$

Quindi la somma di due numeri complessi, z_1 e z_2, è un numero complesso la cui parte reale è la somma delle parti reali di z_1 e z_2 e la sua parte immaginaria la somma delle parti immaginarie di z_1 e z_2.
La sottrazione $(-)$ può essere definita, come nel caso dei numeri reali, come la somma fra due numeri complessi di cui uno è preso con segno negativo:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 + i\,b_1) - (a_2 + i\,b_2) = (a_1 - a_2) + i\,(b_1 - b_2).$$

Per quanto riguarda la moltiplicazione, questa sarà indicata con il simbolo $\cdot$ e sarà definita come il prodotto di due binomi:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 =& (a_1 + i\,b_1) \cdot (a_2 + i\,b_2) = a_1\,a_2 + i\,a_1\,b_2 + i\,a_2\,b_1 + i^2\,b_1\,b_2 = \\ =& (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1), \end{aligned}$$

dove il termine $-b_1\,b_2$ si ottiene tenendo conto che $i^2 = -1$. E' facile osservare che:

$z^2 = (a + i\,b)^2 = (a^2 - b^2) + 2\,i\,a\,b,$ che è ancora un numero complesso

e che

$z \cdot \bar{z} = (a + i\,b) \cdot (a - i\,b) = a^2 + b^2,$ che è un numero reale positivo.

La divisione di due numeri complessi è definita come la divisione di due binomi:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i\, b_1}{a_2 + i\, b_2}.$$

Tuttavia, per ottenere un risultato nella forma algebrica $\frac{z_1}{z_2} = A + i\, B$ è necessario moltiplicare numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore. Si ha:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} =& \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a_1 + i\, b_1) \cdot (a_2 - i\, b_2)}{(a_2 + i\, b_2) \cdot (a_2 - i\, b_2)} = \frac{(a_1 + i\, b_1) \cdot (a_2 - i\, b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)} = \\ =& \left(\frac{a_1\, a_2 + b_1\, b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + i\, \left(\frac{b_1\, a_2 - b_2\, a_1}{a_2^2 + b_2^2} \right).\end{aligned}$$

2.1. Proprietà dei complessi coniugati. Come visto nell'esempio introduttivo, la soluzione dell'equazione $z^2 - 4z + 13 = 0$ è data dal numero complesso $z = 2 + 3\, i$ e dal suo complesso coniugato $\bar{z} = 2 - 3\, i$. Questo risultato non è casuale. Infatti, in generale, se un'equazione polinomiale ammette un numero complesso come soluzione allora ammetterà come soluzione anche il suo coniugato. Valgono le seguenti proprietà.

TEOREMA 2.1. *Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Allora*

(1) *$z = \bar{z}$ se e solo se $z \in \mathbb{R}$, ossia $Im(z) = 0$.*
(2) *$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.*
(3) *$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.*

PROOF. Dimostriamo la (1). Dimostriamo prima l'implicazione diretta: $z = \bar{z} \Rightarrow Im(z) = 0$. Consideriamo la rappresentazione algebrica di $z = a + i\, b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Secondo questa notazione sarà $\bar{z} = a - i\, b$. Se $z = \bar{z} \Rightarrow a + i\, b = a - i\, b$ che è vera se e solo se $b = -b$. Essendo $b \in \mathbb{R}$ quest'ultima equazione implica $b = 0$. Ricordando che, per definizione, $b = Im(z)$ il teorema resta provato. Si lascia allo studente la dimostrazione dell'implicazione inversa, ossia: se $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z}$.

Dimostriamo ora la proprietà (2), usando anche in questo caso la notazione algebrica: $z_1 = a_1 + i\, b_1$ e $z_2 = a_2 + i\, b_2$. Sfruttando la definizione precedentemente data dell'operazione di somma, abbiamo:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} =& \overline{(a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)} = (a_1 + a_2) - i\,(b_1 + b_2) = \\ =& (a_1 - i\, b_1) + (a_2 - i\, b_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,\end{aligned}$$

che è quanto volevasi dimostrare. In modo analogo, e con la stessa notazione possiamo dimostrare la proprietà (3):

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} =& \overline{(a_1\, a_2 - b_1\, b_2) + i\,(a_1\, b_2 + a_2\, b_1)} = \\ =& (a_1\, a_2 - b_1\, b_2) - i\,(a_1\, b_2 + a_2\, b_1) = \\ =& (a_1 - i\, b_1) \cdot (a_2 - i\, b_2) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,\end{aligned}$$

□

Le proprietà appena dimostrate consentono di dimostrare il il seguente importante teorema.

TEOREMA 2.2. *Sia*

$$a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0 = 0$$

un'equazione polinomiale nella variabile x i cui coefficienti $a_0,\ a_1,\ \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Se $x = a + i\, b \in \mathbb{C}$ è soluzione dell'equazione, allora anche il suo complesso coniugato $\bar{x} = a - i\, b$ è soluzione dell'equazione.

PROOF. Sia $x = a + i\, b$ soluzione dell'equazione $a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0 = 0$. Essendo il membro destro pari a $0 \in \mathbb{R}$ anche il membro sinistro sarà un numero reale. Quindi il complesso coniugato di $a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0$ sarà anche uguale a 0 (per la proprietà (1) dimostrata sopra). Quindi $x = a + i\, b$ è anche soluzione dell'equazione:

$$\overline{a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0} = 0.$$

Applicando iterativamente la proprietà (2) dimostrata sopra, questa equazione diventa:

$$\overline{a_n\, x^n} + \overline{a_{n-1}\, x^{n-1}} + ... + \overline{a_1\, x} + \overline{a_0} = 0,$$

che, tenuto conto del fatto che tutti i coefficienti $a_i \in \mathbb{R}$ e della proprietà (3), possiamo riscrivere nel seguente modo:

$$a_n\, \overline{x^n} + a_{n-1}\, \overline{x^{n-1}} + ... + a_1\, \overline{x} + a_0 = 0.$$

Infine applicando iterativamente la proprietà (3) otteniamo:

$$a_n\, \overline{x}^n + a_{n-1}\, \overline{x}^{n-1} + ... + a_1\, \overline{x} + a_0 = 0.$$

Questa uguaglianza mostra che $\bar{x} = a - i\, b$ è pure soluzione dell'equazione iniziale. □

3. Rappresentazione geometrica di un numero complesso

Un numero complesso può essere rappresentato tramite una coppia ordinata di numeri reali (a, b) e raffigurato come un punto del piano (x,y), dove l'asse delle ascisse (x) è l'asse reale e l'asse delle ordinate (y) l'asse immaginario. Il luogo dei punti, ossia le coppie ordinate, ottenuto dal prodotto cartesiano $X \times Y$ prende il nome di **Piano Complesso** o **Piano di Argand-Gauss** (Fig.1).

Un numero complesso $z = a + i\, b$ è rappresentato sul piano complesso dal punto di coordinate (a, b). La distanza del punto $z = (a, b)$ dall'origine si ottiene tramite il teorema di Pitagora:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + i\, b)\,(a - i\, b)} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

Quindi la distanza di un numero complesso z dal numero complesso $0 + i\, 0$ è un numero reale e prende il nome di *norma* o *modulo* del numero complesso z.

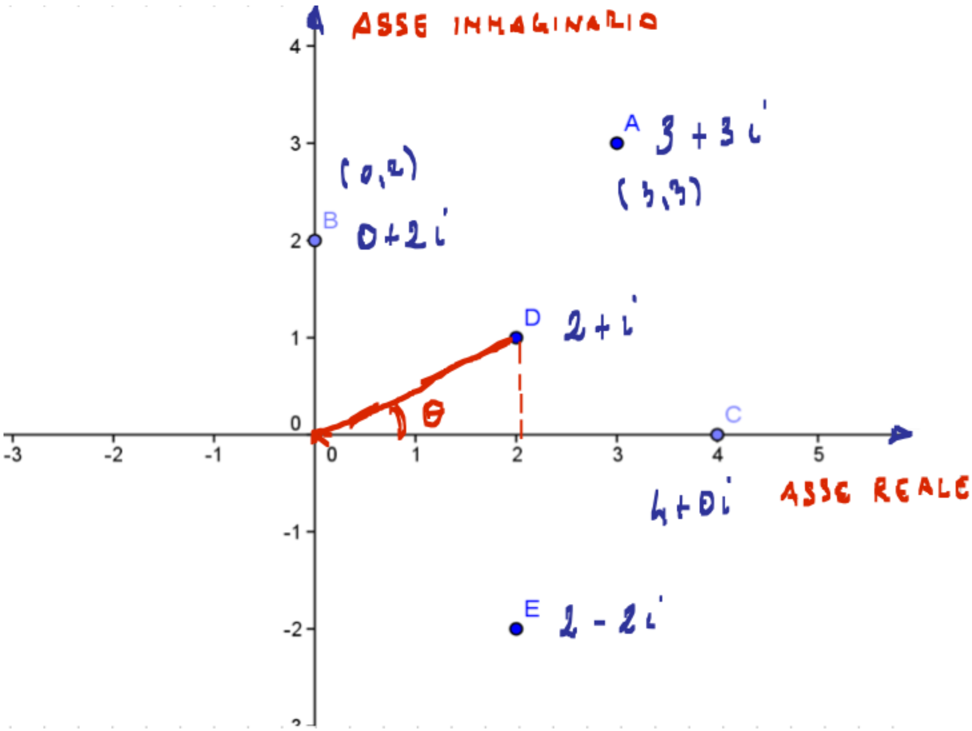


FIGURE 1. Piano complesso.

Si consideri, adesso, la rappresentazione di un numero complesso $z = a + i\,b$ sul piano complesso (ad esempio il punto D=(2,1) corrispondente al numero complesso $2 + i\,1$) ed il segmento che congiunge tale punto con l'origine degli assi. L'angolo θ che questo segmento forma con l'asse reale (l'ascissa) prende il nome di *argomento* del numero complesso. Se indichiamo con r il modulo del numero complesso $z = a + i\,b$, per definizione di $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$, risulta:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r}\ ;\ \sin(\theta) = \frac{b}{r}.$$

Queste relazioni ci consentono di scrivere il numero complesso z in funzione di r e θ:

$$z = a + i\,b = r\,\cos(\theta) + i\,r\,\sin(\theta) = r\,[\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)].$$

Tale rappresentazione prende il nome di *rappresentazione polare* del numero complesso z. Come vedremo, la rappresentazione polare è molto utile per il calcolo delle potenze e delle radici di un numero complesso.

TEOREMA 3.1. *Teorema di De Moivre.* *Sia $z \in \mathbb{C}$ e sia $z = r\,[\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)]$ la sua rappresentazione polare. Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che:*

$$z^n = r^n\,[\cos(n\,\theta) + i\,\sin(n\,\theta)].$$

Proof. Dimostriamo il teorema per induzione matematica. Per $n = 1$ il teorema è provato, visto che la formula di z^n si riduce alla rappresentazione polare di z. Supponiamo che la formula sia vera per n, quindi che $z^n = r^n [\cos(n\,\theta) + i\,\sin(n\,\theta)]$, e mostriamo che essa vale anche per $n+1$. Si ha:

$$\begin{aligned} z^{n+1} =& z^n \cdot z = r^n [\cos(n\,\theta) + i\,\sin(n\,\theta)]\, r\, [\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)] = \\ =& r^{n+1}\, \{\cos(n\,\theta)\,\cos(\theta) - \sin(n\,\theta)\,\sin(\theta) + \\ &+ i\,[\sin(n\,\theta)\,\cos(\theta) + \cos(n\,\theta)\,\sin(\theta)]\} = \\ =& r^{n+1} [\cos(n\,\theta + \theta) + i\,\sin(n\,\theta + \theta)] = \\ =& r^{n+1} \{\cos[(n+1)\,\theta] + i\,\sin[(n+1)\,\theta]\}. \end{aligned}$$

□

Il teorema di De Moivre può essere utilizzato per mostrare come si calcoli la radice n-esima di un numero complesso. Supponiamo di volere calcolare la radice n-esima del numero complesso $w = h\,[\cos(\psi) + i\,\sin(\psi)]$. Indichiamo con $z = r\,[\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)]$ la ricercata radice n-esima di w. Dovrà quindi valere la relazione $z^n = w$, da cui, sfruttando il teorema di De Moivre, otteniamo

$$r^n [\cos(n\,\theta) + i\,\sin(n\,\theta)] = h\,[\cos(\psi) + i\,\sin(\psi)].$$

Affinché l'uguaglianza sia verificata dovrà essere: $r^n = h$, $\cos(n\,\theta) = \cos(\psi)$ e $\sin(n\,\theta) = \sin(\psi)$, da cui $r = h^{\frac{1}{n}}$ e $n\,\theta = \psi + 2\,k\,\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, ossia $\theta_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}$. Si dimostra facilmente che solo per $k = 0, 1, ..., n-1$ si ottengono radici distinte. Riassumendo, dunque, un numero complesso $w = h\,[\cos(\psi) + i\,\sin(\psi)]$ ammette n radici n-esime distinte:

$$w^{\frac{1}{n}} = h^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\psi + 2\,k\,\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\psi + 2\,k\,\pi}{n}\right)\right], \text{per } k = 0, 1, ..., n-1.$$

Esercizi 3.1

- Dato il numero complesso $w = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, valutare $\bar{w}^4$.
- Calcolare $z \in \mathbb{C}$ radice quarta del numero complesso $w = -2\sqrt{3} - 2\,i$.
- Calcolare $z \in \mathbb{C}$ radice quinta del numero complesso $w = -32$.
- Calcolare $z \in \mathbb{C}$ radice terza del numero complesso $w = 8$.

In calcolo delle probabilità è molto utilizzata la funzione esponenziale di un numero complesso. Sia $z \in \mathbb{C}$ con $z = x + i\,y$. Si definisce funzione esponenziale di z la seguente funzione:

$$e^z = e^x\,[\cos(y) + i\,\sin(y)]\,.$$

In realtà, questa definizione è il risultato di una dimostrazione che utilizza la convergenza di serie di funzioni. Si osservi che e^z è un numero complesso, dove $e^x \cos(y)$ è la parte reale e $e^x \sin(y)$ la parte immaginaria. La definizione data di funzione esponenziale consente di mantenere anche nel campo complesso tutte le proprietà della funzione esponenziale di variabile reale. In particolare:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Possiamo dimostrare questa proprietà direttamente, sfruttando la definizione data di funzione esponenziale e le formule trigonometriche di addizione. Infatti, date le rappresentazioni algebriche $z_1 = x_1 + i\, y_1$ e $z_2 = x_2 + i\, y_2$, risulta:

Proof.

$$
\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} =& e^{x_1+x_2}\ [\cos(y_1+y_2) + i\ \sin(y_1+y_2)] = \\
& \text{(ricordando le formule di addizione per seno e coseno)} \\
=& e^{x_1+x_2}\ \{\cos(y_1)\cos(y_2) - \sin(y_1)\sin(y_2) + \\
& + i\ [\sin(y_1)\cos(y_2) + \cos(y_1)\sin(y_2)]\} = \\
=& e^{x_1+x_2}\ \{\cos(y_2)[\cos(y_1) + i\ \sin(y_1)] + \\
& + \sin(y_2)\,[-\sin(y_1) + i\ \cos(y_1)]\} = \\
=& e^{x_1+x_2}\ \{\cos(y_2)[\cos(y_1) + i\ \sin(y_1)] + \\
& + i\ \sin(y_2)\,[\cos(y_1) + i\sin(y_1)]\} = \\
=& e^{x_1+x_2}\ \{[\cos(y_2) + i\ \sin(y_2)][\cos(y_1) + i\ \sin(y_1)]\} = \\
=& e^{x_1}[\cos(y_1) + i\ \sin(y_1)] \cdot e^{x_2}\,[\cos(y_2) + i\ \sin(y_2)] = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.
\end{aligned}
$$

□

Si ricorda che in $\mathbb{R}$ si ha $e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Si dimostra facilmente che questa proprietà continua a valere anche in campo complesso, ossia $e^z \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Infatti, notando che dalla definizione di e^z segue immediatamente $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, possiamo calcolare il modulo quadro di e^z:

$$|e^z|^2 = e^z \cdot \overline{e^z} = e^z \cdot e^{\overline{z}} = e^{x+i\,y}\, e^{x-i\,y} = e^{x+i\,y+x-i\,y} = e^{2\,x} > 0.$$

Dalla definizione di funzione esponenziale in campo complesso si deduce la **Formula di Eulero** (basta considerare un numero puramente immaginario nella definizione della funzione esponenziale, ossia porre $x = 0$):

$$e^{i\,y} = \cos(y) + i\,\sin(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

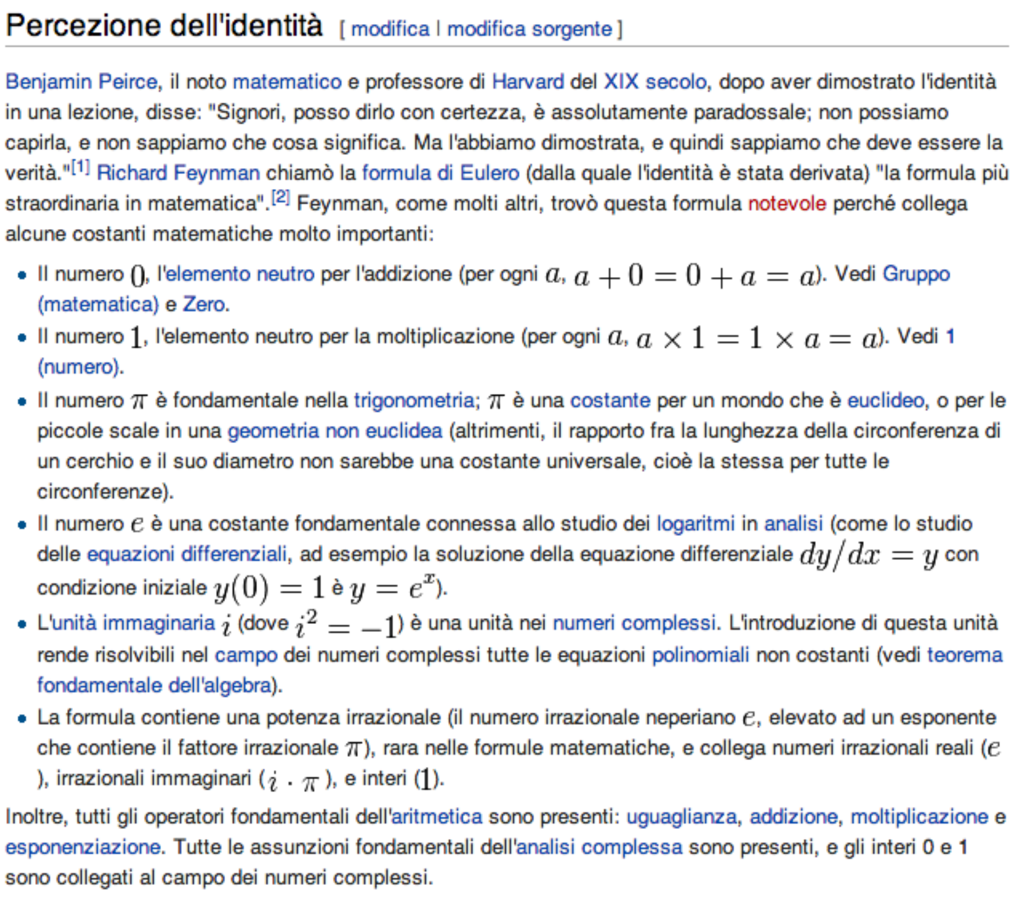
Lo studente verifichi che

$$\left|e^{i\,y}\right| = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Infine, ponendo $y = \pi$ nell'espressione di $e^{i\,y}$ si ottiene la famosa **Identità di Eulero**:

$$e^{i\,\pi} + 1 = 0,$$

che mostra come le più importanti costanti della matematica (0, 1, e, i, π) siano legate tra loro.



Percezione dell'identità [modifica | modifica sorgente]

Benjamin Peirce, il noto matematico e professore di Harvard del XIX secolo, dopo aver dimostrato l'identità in una lezione, disse: "Signori, posso dirlo con certezza, è assolutamente paradossale; non possiamo capirla, e non sappiamo che cosa significa. Ma l'abbiamo dimostrata, e quindi sappiamo che deve essere la verità."[1] Richard Feynman chiamò la formula di Eulero (dalla quale l'identità è stata derivata) "la formula più straordinaria in matematica".[2] Feynman, come molti altri, trovò questa formula notevole perché collega alcune costanti matematiche molto importanti:

- Il numero 0, l'elemento neutro per l'addizione (per ogni a, $a + 0 = 0 + a = a$). Vedi Gruppo (matematica) e Zero.
- Il numero 1, l'elemento neutro per la moltiplicazione (per ogni a, $a \times 1 = 1 \times a = a$). Vedi 1 (numero).
- Il numero π è fondamentale nella trigonometria; π è una costante per un mondo che è euclideo, o per le piccole scale in una geometria non euclidea (altrimenti, il rapporto fra la lunghezza della circonferenza di un cerchio e il suo diametro non sarebbe una costante universale, cioè la stessa per tutte le circonferenze).
- Il numero e è una costante fondamentale connessa allo studio dei logaritmi in analisi (come lo studio delle equazioni differenziali, ad esempio la soluzione della equazione differenziale $dy/dx = y$ con condizione iniziale $y(0) = 1$ è $y = e^x$).
- L'unità immaginaria i (dove $i^2 = -1$) è una unità nei numeri complessi. L'introduzione di questa unità rende risolvibili nel campo dei numeri complessi tutte le equazioni polinomiali non costanti (vedi teorema fondamentale dell'algebra).
- La formula contiene una potenza irrazionale (il numero irrazionale neperiano e, elevato ad un esponente che contiene il fattore irrazionale π), rara nelle formule matematiche, e collega numeri irrazionali reali (e), irrazionali immaginari ($i \cdot \pi$), e interi (1).

Inoltre, tutti gli operatori fondamentali dell'aritmetica sono presenti: uguaglianza, addizione, moltiplicazione e esponenziazione. Tutte le assunzioni fondamentali dell'analisi complessa sono presenti, e gli interi 0 e 1 sono collegati al campo dei numeri complessi.

FIGURE 2. Fonte: Wikipedia 2013