APPUNTI DI MATEMATICA

IL CALCOLO LETTERALE

ALESSANDRO BOCCONI

Indice

Capitolo 1

Il calcolo letterale (prima parte)

1.1 Il perché del calcolo letterale

Fin dai primi anni di studio della matematica, siamo abituati ad usare formule in cui compaiono delle lettere. Si consideri ad esempio l'area del quadrato che è data dal lato elevato alla seconda. In formule:

$$A = l^2$$

Conoscendo quindi la misura del lato del quadrato, si determina l'area semplicemente sostituendo il valore numerico a l nella formula appena scritta.

Esempio

▷ Un quadrato ha il lato di 5 cm. Determinare la sua area.

$l = 5$ cm per cui:

$$A = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$$

□

Nell'esempio abbiamo usato una formula che contiene delle lettere e ad esse abbiamo sostituito i dati forniti dal problema e abbiamo calcolato l'area. Per fare questa operazione non è certo necessario usare il calcolo letterale!

Consideriamo adesso il seguente:

Esempio

▷ L'Arno ha 3 affluenti "fiorentini": il Mugnone, l'Africo e il Terzolle. La portata d'acqua giornaliera che immette il Mugnone nell'Arno è doppia di quella che immette il Terzolle, mentre quella che immette l'Africo è la metà di quella del Terzolle. Rappresentare, con un'espressione matematica, la portata totale d'acqua che questi affluenti immettono giornalmente nell'Arno.

Si osserva innanzitutto che non ci viene fornita la portata d'acqua di nessuno dei 3 affluenti che fra l'altro è un dato variabile (ad esempio quando piove molto la portata aumenta), ma ci viene dato solo il rapporto fra le portate dei vari affluenti. Indichiamo allora con la lettera p la portata d'acqua giornaliera del Terzolle. Dal momento che quella del Mugnone è doppia di quella del Terzolle risulta:

Portata del Mugnone = il doppio di $p = 2 \cdot p$.

Mentre quella dell'Africo è metà di quella del Terzolle quindi:

Portata dell'Africo = metà di $p = p$ diviso $2 = \frac{p}{2}$.

La portata totale è la somma delle 3 portate quindi:

$$\text{portata totale} = \text{portata Terzolle} + \text{portata Mugnone} + \text{portata Africo} = p + 2 \cdot p + \frac{p}{2}$$

che è l'espressione matematica cercata.

□

L'espressione sopra scritta è un'espressione letterale (perché contiene, oltre i numeri, anche delle lettere) e per risolverla sono necessari gli strumenti del calcolo letterale. L'importanza che rivestono queste espressioni risiede nel fatto che la loro risoluzione non dipende da un valore numerico da attribuire alle lettere (in questo caso a p), ma ha validità generale qualunque valore si assegni alle lettere.

Questo spiega l'importanza di imparare ad usare il calcolo letterale.

1.2 I monomi

Prima di introdurre i monomi e successivamente le varie operazioni con i monomi, risulta estremamente utile effettuare la seguente:

Osservazione. Dal momento che generalmente le lettere possono assumere qualunque valore numerico, vanno considerate come numeri. Pertanto nel calcolo letterale valgono le stesse proprietà viste per i numeri, come la proprietà commutativa per l'addizione e la moltiplicazione e la proprietà distributiva. Inoltre le operazioni hanno lo stesso ordine di priorità già visto per le operazioni fra numeri.

□

L'espressione letterale più semplice è il monomio che è così definito:

Definizione di monomio. Il monomio è un'espressione letterale contenente solo moltiplicazioni e potenze.

Prima di passare agli esempi ricordiamo che è valida la seguente notazione: se 2 lettere, o una lettera ed un numero, non sono separate da nessun segno di operazione si sottintende che fra le due lettere, o fra la lettera ed il numero, ci sia l'operatore della moltiplicazione.

Esempi

▷ $2a^3bc$ (per la notazione appena vista quest'espressione vuol dire "2 per a^3 per b per c"). Quest'espressione letterale è un monomio in quanto compaiono solo moltiplicazioni e potenze.

▷ $-5a^4$ quest'espressione letterale è un monomio in quanto compaiono solo moltiplicazioni e potenze (il meno non indica una sottrazione ma il segno della parte numerica del monomio)

▷ $\frac{5}{3}ab^2$ quest'espressione letterale è un monomio in quanto la frazione che compare è numerica. Le lettere sono legate da moltiplicazioni e potenze e quindi rispettano la deinizione di monomio.

▷ $2ab^2 3a^3 c$ quest'espressione letterale è un monomio in quanto compaiono solo moltiplicazioni e potenze.

□

L'ultimo esempio è diverso dagli altri in quanto compaiono 2 numeri e 2 volte una stessa lettera. Risulta utile la seguente:

Definizione di monomio in forma normale. Un monomio è in forma normale se compare un solo numero e ciascuna lettera compare una sola volta.

□

Negli esempi ora visti, tutti i monomi sono in forma normale eccetto che l'ultimo esempio. È preferibile avere a che fare con monomi in forma normale e per questo si usa il seguente:

Metodo per ridurre un monomio in forma normale. Si consideri l'ultimo esempio:

$$2ab^2 3a^3 c$$

I numeri e le lettere sono legati fra loro da moltiplicazioni, e la moltiplicazione gode sia della proprietà commutativa sia di quella associativa, quindi possiamo scrivere:

$$2ab^2 3a^3 c = 2 \cdot 3aa^3 b^2 c$$

Al posto di $2 \cdot 3$ possiamo ovviamente scrivere 6, mentre per effettuare il prodotto $a \cdot a^3$ si usa la prima proprietà delle potenze vista per i numeri naturali: il prodotto di 2 potenze aventi la stessa base (in questo caso a) è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti. Quindi $a \cdot a^3 = a^4$ e il monomio diventa:

$$2ab^2 3a^3 c = 2 \cdot 3aa^3 b^2 c = 6a^4 b^2 c$$

che è ridotto in forma normale.

□

D'ora in poi quando parleremo di monomi intenderemo sempre monomi ridotti in forma normale.

Dagli esempi abbiamo visto che un monomio è composto da **una parte numerica** (comprendente anche il segno) detta anche **coefficiente del monomio** e da **una parte letterale**.

Esempi

▷ Nel monomio $2a^3bc$; 2 è la parte numerica e a^3bc la parte letterale.

▷ Nel monomio $-5a^4$; -5 è la parte numerica e a^4 la parte letterale.

▷ Nel monomio a^4b; 1 è la parte numerica (sottintesa) e a^4b la parte letterale.

▷ Nel monomio $-a^4b$; -1 è la parte numerica (sottintesa) e a^4b la parte letterale.

▷ -7 viene considerato un monomio che ha -7 come parte numerica e parte letterale nulla.

□

Dall'ultimo esempio segue un importante:

Osservazione. Tutti i numeri sono considerati monomi aventi parte letterale nulla.

□

Per proseguire la nostra trattazione risultano importanti le seguenti definizioni:

Definizione di monomi simili. Due monomi sono simili se hanno la stessa parte letterale.

Esempi

▷ I monomi $5a^3b$ e $-\frac{2}{3}a^3b$ sono simili in quanto hanno la stessa parte letterale.

▷ I monomi $5a^3b$ e $-\frac{2}{3}a^3b^2$ <u>non</u> sono simili in quanto non hanno la stessa parte letterale (hanno le stesse lettere ma nel primo monomio b è elevato alla prima, mentre nel secondo b è elevato alla seconda).

□

Definizione di monomi opposti. Due monomi simili sono opposti se hanno parte numerica uguale in valore assoluto e di segno opposto.

Osservazione. Dalla definizione segue che 2 monomi, per essere opposti, devono necessariamente essere anche simili.

Esempi

▷ I monomi $5a^3b$ e $-5a^3b$ sono opposti in quanto sono simili e le parti numeriche sono opposte.

▷ I monomi $5a^3b$ e $-2a^3b$ non sono opposti perché, se pur sono simili, non hanno le parti numeriche opposte.

▷ I monomi $7a^3b$ e $-7bc^3$ non sono opposti perché non sono simili.

□

Definizione di grado di un monomio. Si definisce grado di un monomio la somma degli esponenti della parte letterale.

Esempi

▷ $5a^3b^5$ ha grado 8.

▷ $2a^3bc^2$ ha grado 6 (perché b ha esponente sottinteso 1).

▷ 7^2a^3 ha grado 3 (perché l'esponente della parte numerica non influisce sul grado del monomio).

▷ 9 ha grado 0 (come tutti i monomi di parte letterale nulla).

□

1.3 L'addizione e la sottrazione fra monomi

Supponiamo di trovarci di fronte alla seguente espressione letterale:

$$2a + 5a$$

osserviamo innanzitutto che non si tratta di un monomio (perché è presente l'operatore + dell'addizione), bensì della somma di 2 monomi: il monomio $2a$ e il monomio $5a$. È possibile effettuare tale somma e per convincersi basta ricordare come abbiamo definito la moltiplicazione nei numeri naturali che ci permette di dire che:

$$2a = a + a; \qquad 5a = a + a + a + a + a$$

Pertanto:

$$2a + 5a = \underbrace{a + a}_{2volte} + \underbrace{a + a + a + a + a}_{5volte} = \underbrace{a + a + a + a + a + a + a}_{7volte} = 7a$$

Nella somma appena effettuata i 2 monomi addendi erano simili. Cosa accade se invece i monomi non sono fra loro simili? Consideriamo l'esempio:

$$2a + 5a^2$$

si osserva subito che il ragionamento precedente non funziona:

$$2a + 5a^2 = \underbrace{a + a}_{2volte} + \underbrace{a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2}_{5volte}$$

ma non possiamo sommare fra loro "oggetti" diversi quali sono a e a^2. Quindi non possiamo svolgere $2a + 5a^2$, e l'addizione va lasciata così come è scritta. Possiamo quindi enunciare la seguente:

Regola per l'addizione e la sottrazione di 2 monomi. Due monomi si possono addizionare (sottrarre) se e soltanto se sono simili. In tal caso la somma (la differenza) è un monomio che ha la stessa parte letterale dei 2 monomi, e come parte numerica la somma (la differenza) delle 2 parti numeriche.

Esempi

▷ $-3ab^2 + 2ab^2$

I 2 monomi sono simili e si possono quindi sommare:

$$-3ab^2 + 2ab^2 = (-3 + 2)ab^2 = -1ab^2 = -ab^2$$

▷ $-\frac{2}{3}a^5 - \frac{3}{5}a^5$

I 2 monomi sono simili e si possono quindi sommare:

$$-\frac{2}{3}a^5 - \frac{3}{5}a^5 = (-\frac{2}{3} - \frac{3}{5})a^5 = \frac{-10 - 9}{15}a^5 = -\frac{19}{15}a^5$$

▷ $7ab^4 - 9ab^3$

I 2 monomi non sono simili e quindi non si possono sommare.

▷ $2b^2 - \frac{1}{5}b^2 - \frac{1}{2}b^2$

I 3 monomi sono simili e si possono quindi sommare:

$$2b^2 - \frac{1}{5}b^2 - \frac{1}{2}b^2 = (2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2})b^2 = \frac{20 - 2 - 5}{10}b^2 = \frac{13}{10}b^2$$

▷ $2ab - \frac{1}{2}ab + 3b - \frac{5}{2}ab + \frac{1}{4}b$

I monomi non sono tutti simili e quindi non si possono sommare insieme. Si osserva però che sono fra loro simili il primo, il secondo e il quarto, e fra loro simili il terzo e il quinto. Quindi:

$$2ab - \frac{1}{2}ab + 3b - \frac{5}{2}ab + \frac{1}{4}b = (2 - \frac{1}{2} - \frac{5}{2})ab + (3 + \frac{1}{4})b = \frac{4 - 1 - 5}{2}ab + \frac{12 + 3}{4}b = -\frac{2}{2}ab + \frac{15}{4}b = -ab + \frac{15}{4}b$$

□

Un buon metodo per non commettere errori è quello di contrassegnare con una sottolineatura uguale i monomi fra loro simili. In questo modo è più difficile confondersi. Applichiamo quanto appena detto all'ultimo esempio:

$$2ab - \frac{1}{2}ab + 3b - \frac{5}{2}ab + \frac{1}{4}b = \underline{2ab} - \underline{\frac{1}{2}ab} + \underbrace{3b} - \underline{\frac{5}{2}ab} + \underbrace{\frac{1}{4}b}$$

In questo modo vediamo subito quali sono i monomi sommabili fra loro.

Osservazione. In un'espressione contenente gruppi di monomi simili bisogna stare particolarmente attenti ai segni. Consideriamo la seguente espressione:

$$-\frac{3}{4}a^2 - \frac{2}{5}b + a^2 + \frac{2}{3}b - 3b$$

effettuiamo le sottolineature:

$$-\underline{\frac{3}{4}a^2} - \underbrace{\frac{2}{5}b} + \underline{a^2} + \underbrace{\frac{2}{3}b} - \underbrace{3b}$$

e osserviamo che ci sono 2 gruppi di monomi fra loro simili. Consideriamo per il momento soltanto i monomi aventi parte letterale a^2 e effettuiamo la somma:

$$(-\frac{3}{4} + 1)a^2 = \frac{-3+4}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

adesso consideriamo soltanto i monomi aventi parte letterale b e effettuiamo la somma:

$$(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - 3)b = \frac{-6+10-45}{15}b = -\frac{41}{15}b$$

Osserviamo che dentro le parentesi i coefficienti hanno lo stesso segno che hanno nell'espressione originale.

Il risultato è quindi:

$$\frac{1}{4}a^2 - \frac{41}{15}b$$

In genere per svolgere un'espressione di questo tipo, non la dividiamo in 2 parti come abbiamo fatto adesso, ma la portiamo avanti tutta insieme. Bisogna però capire che segno va messo fra i due gruppi di monomi e per il momento mettiamo un punto interrogativo:

$$(-\frac{3}{4} + 1)a^2 \quad \textbf{?} \quad (-\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - 3)b = \frac{1}{4}a^2 \quad \textbf{?} \quad (-\frac{41}{15})b$$

Al posto del punto interrogativo bisogna mettere un segno che non cambi il segno che c'è dentro la parentesi successiva. Quindi deve essere tale che moltiplicato per "+" dia "+", e moltiplicato per "−" dia "−". Dalla regola dei segni sappiamo che questo segno è il "+", quindi l'espressione diventa:

$$(-\frac{3}{4} + 1)a^2 \boldsymbol{+} (-\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - 3)b = \frac{1}{4}a^2 \boldsymbol{+} (-\frac{41}{15})b = \frac{1}{4}a^2 - \frac{41}{15}b$$

$\square$

Possiamo quindi dare il seguente:

Metodo per la risoluzione di espressioni contenenti addizioni e sottrazioni di gruppi di monomi simili.

1. Si effettuano sottolineature uguali per monomi fra loro simili

2. Si mettono le parti numeriche di ciascun gruppo di monomi simili dentro le parentesi col segno che hanno nell'espressione. Ogni parentesi deve essere preceduta dal segno "+" (a parte la prima dove il segno può essere sottinteso)
3. Si eseguono le somme algebriche all'interno delle parentesi
4. Si tolgono le parentesi rispettando la regola dei segni

Esempio

▷ $-\frac{3}{10}bc + \frac{1}{4}a^3 - \frac{2}{3}ab + \frac{2}{5}bc + \frac{1}{6}ab - \frac{4}{5}bc$

Si effettuano le sottolineature:

$$-\underline{\frac{3}{10}bc} + \underline{\underline{\frac{1}{4}a^3}} - \underbrace{\frac{2}{3}ab} + \underline{\frac{2}{5}bc} + \underbrace{\frac{1}{6}ab} - \underline{\frac{4}{5}bc}$$

Si mettono le parti numeriche di ciascun gruppo di monomi simili dentro le parentesi col segno che hanno nell'espressione. Ogni parentesi deve essere preceduta dal segno "+" (a parte la prima dove il segno può essere sottinteso):

$$(-\frac{3}{10} + \frac{2}{5} - \frac{4}{5})bc + (+\frac{1}{4})a^3 + (-\frac{2}{3} + \frac{1}{6})ab$$

Si eseguono le somme algebriche all'interno delle parentesi

$$(\frac{-3+4-8}{10})bc + (+\frac{1}{4})a^3 + (\frac{-4+1}{6})ab = (-\frac{7}{10})bc + (+\frac{1}{4})a^3 + (-\frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,2}})ab$$

Si tolgono le parentesi rispettando la regola dei segni

$$-\frac{7}{10}bc + \frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{2}ab$$

□

1.4 La moltiplicazione fra monomi

Abbiamo in pratica già affrontato la moltiplicazione fra monomi quando abbiamo ridotto in forma normale un monomio. Possiamo quindi dare subito la seguente:

Regola per la moltiplicazione fra monomi. Il prodotto fra 2 monomi è un monomio che ha:

- come parte numerica il prodotto delle parti numeriche
- come parte letterale il prodotto delle parti letterali (effettuato tramite le proprietà delle potenze). Quindi la parte letterale contiene tutte le lettere presenti nei monomi, e ciascuna lettera ha come esponente la somma degli esponenti che ha nei monomi da moltiplicare.

Esempi

▷ $-3a^4b \cdot 2b^2c$

Le parti numeriche sono -3 e 2, quindi il prodotto fra le parti numeriche è -6. Le lettere presenti nei monomi sono a, b, c: a compare solo nel primo monomio con esponente 4, e quindi anche nel prodotto comparirà con esponente 4. b compare nel primo monomio con esponente (sottinteso) 1, e nel secondo con esponente 2: nel prodotto comparirà quindi b^3 $(2+1=3)$. c compare solo nel secondo monomio con esponente sottinteso 1. Quindi:

$$-3a^4b \cdot 2b^2c = -6a^4b^3c$$

▷ $\frac{3}{8}a^2c \cdot (-\frac{4}{5}a)$

Il primo monomio è positivo e il secondo è negativo. Per la regola dei segni il prodotto risulta negativo. Inoltre per calcolare la parte numerica si deve eseguire il prodotto fra le parti numeriche. Quindi:

$$\frac{3}{8}a^2c \cdot (-\frac{4}{5}a) = -\frac{3}{\cancel{8}\,2} \cdot \frac{\cancel{4}\,1}{5}a^3c = -\frac{3}{10}a^3c$$

□

1.5 Potenze di monomi

Supponiamo di avere una potenza la cui base è un monomio come nel seguente esempio:

$$(3a^3bc^2)^4$$

Dalla definizione di potenza segue che:

$$(3a^3bc^2)^4 = \underbrace{3a^3bc^2 \cdot 3a^3bc^2 \cdot 3a^3bc^2 \cdot 3a^3bc^2}_{4volte}$$

e per quanto visto nel precedente paragrafo, effettuando una moltiplicazione alla volta:

$$3a^3bc^2 \cdot 3a^3bc^2 \cdot 3a^3bc^2 \cdot 3a^3bc^2 = 9a^6b^2c^4 \cdot 3a^3bc^2 \cdot 3a^3bc^2 = 27a^9b^3c^6 \cdot 3a^3bc^2 = 81a^{12}b^4c^8$$

L'esempio ci suggerisce la seguente:

Regola per l'elevamento a potenza di un monomio. La potenza di un monomio è un monomio avente:

- come parte numerica, la parte numerica del monomio elevata all'esponente della potenza
- come parte letterale, le lettere del monomio ciascuna delle quali prese con esponente uguale al prodotto fra l'esponente che aveva nel monomio e l'esponente della potenza del monomio

Esempi

▷ Prendiamo ancora $(3a^3bc^2)^4$ e applichiamo la regola appena vista.

Il risultato deve avere come parte numerica la parte numerica del monomio (in questo caso 3) elevata all'esponente della potenza (in questo caso 4). Quindi $3^4 = 81$.

Come parte letterale si considera ciascuna lettera del monomio: a deve avere come esponente il prodotto fra l'esponente che aveva nel monomio (in questo caso 3) e l'esponente della potenza del monomio (in questo caso 4). Quindi, dato che $3 \cdot 4 = 12$, a deve avere esponente 12. b ha nel monomio esponente (sottinteso) 1, mentre l'esponente della potenza del monomio è, come già detto, 4. Quindi, dopo aver svolto la potenza, b avrà esponente $1 \cdot 4 = 4$. c ha nel monomio esponente 2. Quindi, dopo aver svolto la potenza, c avrà esponente $2 \cdot 4 = 8$. Ricapitolando:

$$(3a^3bc^2)^4 = 81a^{12}b^4c^8$$

che è ovviamente lo stesso risultato trovato in precedenza.

▷ Calcolare $(-2ab^3)^3$.

Applicando la regola otteniamo come parte numerica $(-2)^3 = -8$ e come parte letterale a^3 (perché a nel monomio è elevata alla prima e l'esponente della potenza del monomio è 3, quindi $1 \cdot 3 = 3$) e b^9 (perché b nel monomio è elevata alla terza e l'esponente della potenza del monomio è 3, quindi $3 \cdot 3 = 9$). Quindi:

$$(-2ab^3)^3 = -8a^3b^9$$

▷ Calcolare $(-\frac{2}{5}a^2b^4)^2$.

Applicando la regola otteniamo come parte numerica $(-\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$ e come parte letterale a^4 (perché a nel monomio è elevata alla seconda e l'esponente della potenza del monomio è 2, quindi $2 \cdot 2 = 4$) e b^8 (perché b nel monomio è elevata alla quarta e l'esponente della potenza del monomio è 2, quindi $4 \cdot 2 = 8$). Quindi:

$$(-\frac{2}{5}a^2b^4)^2 = \frac{4}{25}a^4b^8$$

□

1.6 La divisione fra monomi

Ricordiamoci che effettuare una divisione fra 2 numeri vuol dire determinare un terzo numero (quoziente) che moltiplicato al secondo numero (divisore) ha come risultato il primo. Ad esempio effettuare la divisione $10 : 2$ significa trovare un numero (il quoziente) che moltiplicato a 2 (il divisore) ha come risultato 10 (il dividendo). Tale numero è ovviamente 5 che è il quoziente della divisione.

Allo stesso modo effettuare una divisione fra 2 monomi significa individuare un monomio (il quoziente) che moltiplicato per il secondo monomio (il divisore) ha come risultato il primo monomio (dividendo).

Osserviamo che, come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, il prodotto di 2 monomi è sempre un monomio. La stessa cosa non è altrettanto vera per la divisione, in quanto esistono coppie di monomi il cui quoziente non è un monomio (cioè non esiste un monomio che moltiplicato al monomio divisore ha come risultato il monomio dividendo). Chiariamo quanto detto con un esempio:

$$6a^3 : 2a^5$$

Il quoziente di tale divisione dovrebbe essere un monomio la cui parte letterale moltiplicata per a^5 ha come risultato a^3. Risulta evidente che tale monomio non può esistere in quanto in un prodotto gli esponenti si sommano e non esiste un numero naturale che sommato a 5 ha come risultato 3.

In questi casi si dice che non è possibile effettuare la divisione fra i 2 monomi e l'esempio appena visto ci suggerisce il seguente criterio per capire quando è possibile effettuare la divisione fra 2 monomi:

Criterio di divisibilità fra monomi. È possibile effettuare la divisione fra 2 monomi se:

- tutte le lettere presenti nel monomio divisore (il secondo termine della divisione) sono presenti anche nel monomio dividendo (il primo termine)
- ciascuna lettera del monomio divisore deve avere esponente minore o uguale dell'esponente che la stessa lettera ha nel monomio dividendo

□

Osservazione. Il primo punto del criterio di divisibilità è in realtà compreso nel secondo e quindi in un certo senso inutile. Questo perché se una lettera non compare in un monomio è come se ci fosse ugualmente con esponente 0 (sappiamo che qualunque potenza di esponente 0 è uguale a 1 e quindi in un prodotto che ci sia o no non cambia niente). Quindi se una lettera compare solo nel monomio divisore vuol dire che in tale monomio ha esponente come minimo 1, mentre se non compare nel monomio dividendo vuol dire che potremmo considerarla presente con esponente 0. Per dire quindi che tale divisione non è effettuabile è sufficiente il secondo punto in quanto la lettera compare nel divisore con esponente maggiore che nel dividendo.

Dal momento però che questo ragionamento non è così immediato, si preferisce dare il criterio di divisibilità con tutti e 2 i punti.

□

Osservazione. Da quanto detto si nota che la divisibilità fra 2 monomi dipende solo dalla parte letterale: la parte numerica non influisce sulla divisibilità.

□

Esempi

▷ Dire se sono possibili le seguenti divisioni fra monomi:

1. $-\frac{2}{3}a^4bc^2 : (3ab^2c)$
2. $3a^2c^2 : (3ab)$
3. $-\frac{7}{3}a^4bc^2 : (\frac{3}{2}a^4c)$

1. Non è divisibile perché nel monomio divisore la lettera b compare alla seconda, mentre nel monomio dividendo compare alla prima. Risulta quindi violato il secondo punto del criterio di divisibilità.
2. Non è divisibile perché nel monomio divisore compare la lettera b che non compare nel monomio dividendo. Risulta quindi violato il primo punto del criterio di divisibilità.
3. È divisibile perché tutte le lettere del monomio divisore (a e c) compaiono anche nel monomio dividendo. Inoltre l'esponente di a è uguale sia nel dividendo che nel divisore (l'importante è che nel divisore non sia maggiore che nel dividendo) e l'esponente di c nel divisore è 1, quindi minore che nel dividendo che è 2.

□

Abbiamo detto quando è possibile effettuare la divisione fra 2 monomi, ma non abbiamo detto come si fa a determinare il risultato di tale divisione. Diamo quindi la seguente:

Regola per la divisione fra 2 monomi. Data una divisione fra 2 monomi che soddisfano il criterio di divisibilità, il quoziente fra tali monomi è un monomio che ha:

- come parte numerica il quoziente delle parti numeriche
- come parte letterale il quoziente delle parti letterali (effettuato tramite le proprietà delle potenze). Quindi la parte letterale contiene tutte le lettere presenti nel dividendo, e ciascuna lettera ha come esponente la differenza fra l'esponente che ha nel monomio dividendo e l'esponente che ha nel monomio divisore. Se tale differenza è 0 la lettera non compare nel monomio quoziente (dato che una potenza di esponente 0 è sempre 1)

Esempi

▷ $8a^3b^2c : (-4a^2c)$

Innanitutto si osserva che è possibile effettuare tale divisione.

Inoltre le parti numeriche sono 8 e -4, quindi il quoziente fra le parti numeriche è -2. Le lettere presenti nel monomio dividendo sono a, b, c: a compare nel primo monomio (il monomio dividendo) con esponente 3 e nel secondo monomio (il monomio divisore) con esponente 2. Quindi a comparirà nel quoziente con esponente 1 $(3 - 2 = 1)$. b compare nel primo monomio con esponente 2, e nel secondo non compare (quindi è come se fosse con esponente 0). Quindi b comparirà nel quoziente con esponente 2 $(2 - 0 = 2)$. c compare nel primo monomio con esponente (sottinteso) 1 e nel secondo monomio con esponente (sottinteso) 1. Quindi c non comparirà nel quoziente in quanto il suo esponente è 0 $(1 - 1 = 0)$. Quindi:

$$8a^3b^2c : (-4a^2c) = -2ab^2$$

Verifichiamo che tale risultato è giusto: come precedentemente detto il quoziente deve essere un monomio che moltiplicato al monomio divisore ha come risultato il monomio dividendo:

$$-2ab^2 \cdot (-4a^2c) = -2 \cdot (-4)a^{1+2}b^2c = 8a^3b^2c$$

▷ $\frac{8}{3}a^7bc^3 : (-\frac{4}{5}a^7c)$

$$\frac{8}{3}a^7bc^3 : (-\frac{4}{5}a^7c) = -\frac{8}{3} : \frac{4}{5}bc^2 = -\frac{\cancel{8}^{\,2}}{3} \cdot \frac{5}{\cancel{4}_{\,1}}bc^2 = -\frac{10}{3}bc^2$$

□

Osservazione importante sull'ultimo esempio. Si noti che nel quoziente (così come nel prodotto) conviene per primo determinare il segno. Osservando che il monomio dividendo è positivo mentre il divisore è negativo, il risultato deve avere segno negativo, e quindi mettiamo un meno davanti al monomio e trattiamo le parti numeriche come frazioni prive di segno. Inoltre è sbagliato scrivere:

$$\frac{8}{3}a^7bc^3 : (-\frac{4}{5}a^7c) = -\frac{8}{3}a^7bc^3 \cdot \frac{5}{4}a^7c$$

perché in tal caso il risultato avrebbe la parte letterale con esponente la somma degli esponenti (in quano abbiamo erroneamente trasformato la divisione in moltiplicazione) anziché la differenza. È necessario quindi procedere come visto nell'esempio determinando:

1. il segno
2. la parte numerica che, in caso di frazioni, si deterina effettuando il prodotto fra la parte numerica del dividendo e il reciproco della parte numerica del divisore
3. la parte letterale effettuando la differenza degli esponenti.

□

1.7 Massimo Comun Divisore e Minimo Comune Multiplo fra monomi

Effettuiamo una premessa: abbiamo osservato tramite il criterio di divisibilità introdotto nel paragrafo precedente, che la parte numerica è ininfluente sulla divisibilità fra 2 monomi. Per questo motivo, per l'argomento di questo paragrafo, ci concentreremo inizialmente solo sulla parte letterale dei monomi considerando la parte numerica uguale a 1.

Il criterio di divisibilità ci consente di determinare i divisori di un monomio: verifichiamolo con il seguente:

Esempio

▷ Determinare i monomi divisori del monomio ab^3.

Per essere divisore del monomio ab^3, un monomio non deve avere lettere diverse da a e b; inoltre a non può avere esponente maggiore di 1 e b di 3. Quindi:

divisori di ab^3: 1; a; b; b^2; b^3; ab; ab^2; ab^3

(si osservi che il monomio di parte letterale nulla è sempre divisore di tutti i monomi)

□

Dal momento che sappiamo determinare i divisori di un monomio, possiamo determinare i divisori comuni a 2 o più monomi come emerge dal seguente esempio:

Esempio

▷ Determinare i divisori comuni dei monomi a^3b^2; a^2c.

Per essere divisore del monomio a^3b^2, un monomio non deve avere lettere diverse da a e b; inoltre a non può avere esponente maggiore di 3 e b di 2. Quindi:

divisori di a^3b^2: 1; a; a^2; a^3; b; b^2; ab; ab^2; a^2b; a^2b^2; a^3b^2

Per essere divisore del monomio a^2c, un monomio non deve avere lettere diverse da a e c; inoltre a non può avere esponente maggiore di 2 e c di 1. Quindi:

divisori di a^2c: 1; a; a^2; c; ac; a^2c

I divisori comuni sono quindi: 1; a; a^2.

□

Possiamo adesso definire il Massimo Comun Divisore fra monomi:

Definizione di Massimo Comun Divisore fra monomi. Il Massimo Comun Divisore fra 2 o più monomi è, fra i monomi divisori comuni di tali monomi, quello di grado massimo.

□

Tornando all'esempio precedente possiamo quindi affermare che il Massimo Comun Divisore fra i monomi a^3b^2; a^2c è a^2.

Si osserva che il metodo adottato nel precedente esempio non risulta molto veloce. Inoltre fino ad ora abbiamo considerato monomi con parte numerica uguale a 1, mentre adesso vogliamo togliere questa limitazione, considerando qualunque tipo di monomio. Per questo diamo il seguente:

Metodo per la determinazione del Massimo Comun Divisore (M.C.D.) fra monomi. Il Massimo Comun Divisore fra 2 o più monomi è un monomio che ha:

- come parte numerica il Massimo Comun Divisore fra le parti numeriche se sono tutte intere, altrimenti si pone uguale a 1
- come parte letterale, le lettere presenti in tutti i monomi, prese con l'esponente minore

Esempi

▷ Determinare il M.C.D. fra $3a^4b^2c^3$; $9a^2c^4$; $6b^3c^2$

Innanzitutto bisogna determinare la parte numerica: dal momento che le parti numeriche dei monomi sono tutte intere, bisogna determinare il loro M.C.D. che è 3. Per quanto riguarda la parte letterale bisogna prendere le lettere presenti in tutti i monomi (e quindi solo c in quanto a non è presente nel terzo monomio e b non è presente nel secondo). Inoltre c va preso con l'esponente minore in cui figura nei monomi e quindi alla seconda.

Ricapitolando il M.C.D. è $3c^2$.

▷ Determinare il M.C.D. fra $2ab^3$; $\frac{2}{3}a^2b^2$

Dal momento che le parti numeriche non sono tutte intere, la parte numerica del M.C.D. è 1. Per quanto riguarda la parte letterale si osserva che sia a che b sono presenti in tutti i monomi: a con esponente minore 1 e b con esponente minore 2.

Quindi il M.C.D. è ab^2.

□

Consideriamo adesso il problema di determinare i multipli di un monomio, e per farlo torniamo a considerare soltanto i monomi che hanno parte numerica uguale a 1. Come i numeri, anche i monomi hanno infiniti multipli, come vediamo dal seguente:

Esempio

▷ Determinare (alcuni) monomi multipli del monomio a^2b^3.

Per essere multiplo del monomio a^2b^3, un monomio deve avere la lettera a almeno con esponente 2, e la lettera b almeno con esponente 3; inoltre può avere qualsiasi altra lettera con qualunque esponente. Quindi:

Alcuni multipli di a^2b^3: a^2b^3; a^3b^3; a^4b^3; a^2b^4; a^2b^3c...

(si osservi che fra i multipli di un monomio c'è sempre il monomio stesso).

□

Possiamo quindi trovare, dati 2 monomi, i multipli comuni di tali monomi,come si vede dal seguente:

Esempio

▷ Determinare alcuni multipli comuni dei monomi a^2b^3; a^3c.

Come già visto nell'esempio precedente, per essere multiplo del monomio a^2b^3, un monomio deve avere la lettera a almeno con esponente 2, e la lettera b almeno con esponente 3; inoltre può avere qualsiasi altra lettera con qualunque esponente. Quindi:

Alcuni multipli di a^2b^3: a^2b^3; a^3b^3; a^4b^3; a^2b^4; a^2b^3c; a^3b^3c; a^4b^3c...

Per essere multiplo del monomio a^3c, un monomio deve avere la lettera a almeno con esponente 3, e la lettera c; inoltre può avere qualsiasi altra lettera con qualunque esponente. Quindi:

Alcuni multipli di a^3c: a^3c; a^3c^2; a^3c^3; a^3bc; a^3b^2c; a^3b^3c; a^4b^3c...

Alcuni multipli comuni sono quindi: a^3b^3c; a^4b^3c...

□

Possiamo adesso definire il Minimo Comune Multiplo fra monomi:

Definizione di Minimo Comune Multiplo (m.c.m.) fra monomi. Il Minimo Comune Multiplo fra 2 o più monomi è, fra i monomi multipli comuni di tali monomi, quello di grado minimo.

□

Tornando all'esempio precedente possiamo quindi affermare che il Minimo Comune Multiplo fra i monomi a^2b^3; a^3c è a^3b^3c.

Si osserva che il metodo adottato nel precedente esempio non risulta molto veloce. Inoltre fino ad ora abbiamo considerato monomi con parte numerica uguale a 1, mentre adesso vogliamo togliere questa limitazione, considerando qualunque tipo di monomio. Per questo diamo il seguente:

Metodo per la determinazione del Minimo Comune Multiplo fra monomi. Il Minimo Comune Multiplo fra 2 o più monomi è un monomio che ha:

- come parte numerica il Minimo Comune Multiplo fra le parti numeriche se sono tutte intere, altrimenti si pone uguale a 1
- come parte letterale, le lettere presenti in almeno un monomio, ciascuna di esse presa con l'esponente maggiore in cui figura nei monomi

Esempi

▷ Determinare il Minimo Comune Multiplo fra $3a^4b^2c^3$; $9a^2c^4$; $6b^3c^2$

Innanzitutto bisogna determinare la parte numerica: dal momento che le parti numeriche dei monomi sono tutte intere, bisogna determinare il loro m.c.m. che è 18. Per quanto riguarda la parte letterale bisogna prendere le lettere presenti in almeno un monomio ciascuna di esse presa con l'esponente maggiore in cui figura nei monomi: quindi a (compare nel primo monomio con esponente 4 e nel secondo con esponente 2; l'esponente maggiore è quindi 4); b (compare nel primo monomio con esponente 2 e nel terzo con esponente 3; l'esponente maggiore è quindi 3); e c (compare nel primo monomio con esponente 3, nel secondo con esponente 4, nel terzo con esponente 2; l'esponente maggiore è quindi 4).

Ricapitolando il m.c.m. è $18a^4b^3c^4$.

▷ Determinare il m.c.m. fra $2ab^3$; $\frac{2}{3}a^2b^2$

Dal momento che le parti numeriche non sono tutte intere, la parte numerica del m.c.m. è 1. Per quanto riguarda la parte letterale a (compare nel primo monomio con esponente 1 e nel secondo con esponente 2; l'esponente maggiore è quindi 2); b (compare nel primo monomio con esponente 3 e nel secondo con esponente 2; l'esponente maggiore è quindi 3).

Quindi il m.c.m. è a^2b^3.

□

1.8 I polinomi

Il monomio è senz'altro l'espressione letterale più semplice. Tramite il monomio possiamo introdurre una struttura più articolata, indispensabile per continuare il nostro lavoro sul calcolo letterale: il polinomio.

Definizione di polinomio. Il polinomio è la somma algebrica di uno o più monomi.

Esempi

▷ $3a^2b - \frac{1}{5}bc^3$ è un polinomio composto da 2 monomi (detto anche binomio).

▷ $13a^2b - \frac{2}{5}bc^3 - 4ac^4$ è un polinomio composto da 3 monomi (detto anche trinomio).

▷ $3a^2b - \frac{1}{5}bc^3 + \frac{1}{3}a - 6b^2$ è un polinomio composto da 4 monomi (detto anche quadrinomio) e così via.

In particolare un monomio è un polinomio composto da un solo monomio.

□

Definizione di grado di un polinomio. Il grado di un polinomio equivale al grado del monomio avente grado maggiore fra tutti i monomi che lo compongono.

Esempi

▷ $13a^2b - \frac{2}{5}bc^3 - 4ac^4$ è un polinomio formato da 3 monomi: il primo di grado 3, il secondo di grado 4 e il terzo di grado 5. Il grado del polinomio è quindi 5.

▷ $13a^7b^2 - \frac{2}{5}b^4c^3$ è un polinomio formato da 2 monomi: il primo di grado 9 e il secondo di grado 7. Il grado del polinomio è quindi 9.

□

1.9 Addizione e sottrazione fra polinomi

Abbiamo definito il polinomio come una somma algebrica di più monomi. L'addizione o la sottrazione fra polinomi deve avere quindi come risultato un polinomio formato da tutti i monomi che fanno parte dei polinomi che abbiamo addizionato o sottratto. Chiariamo quanto detto con un esempio:

Esempio

▷ $\underbrace{(3x^2 - 5xy)}_{1°polinomio} + \underbrace{(2x - 2y^2 + 6z)}_{2°polinomio}$

Per effettuare l'addizione fra i 2 polinomi dobbiamo togliere le parentesi: dal momento che si tratta di un'addizione tutti i monomi vanno scritti col segno che hanno all'interno dei polinomi. Quindi:

$(3x^2 - 5xy) + (2x - 2y^2 + 6z) = 3x^2 - 5xy + 2x - 2y^2 + 6z$

Dal momento che nel polinomio somma non ci sono monomi simili, l'addizione è conclusa.

▷ $\underbrace{(3x^2 - 5xy)}_{1°polinomio} - \underbrace{(2x - 2y^2 + 6z)}_{2°polinomio}$

Anche per effettuare la sottrazione fra i 2 polinomi dobbiamo togliere le parentesi. Sappiamo dallo studio dei numeri interi che una sottrazione equivale ad un'addizione col secondo termine cambiato di segno. Quindi i monomi del polinomio minuendo (il primo) vanno scritti col segno che hanno all'interno della parentesi, mentre i monomi del polinomio sottraendo (il secondo) vanno scritti col segno opposto di quello che hanno all'interno della parentesi. Quindi:

$(3x^2 - 5xy) - (2x - 2y^2 + 6z) = 3x^2 - 5xy - 2x + 2y^2 - 6z$

Dal momento che nel polinomio differenza non ci sono monomi simili, la sottrazione è conclusa.

□

Gli esempi ci forniscono la seguente:

Regola per l'eliminazione delle parentesi all'interno di un'espressione. In un'espressione contenente soltanto addizioni e sottrazioni fra polinomi, le parentesi possono essere tolte:

- se precedute da segno + (o da nessun segno se sono all'inizio dell'espressione), lasciando i monomi con lo stesso segno che avevano all'interno della parentesi
- se precedute da segno −, scivendo i monomi con il segno opposto di quello che avevano all'interno della parentesi

Esempi

▷ $-(\frac{3}{2}ab + 2ab^2) + (-4a - \frac{1}{3}b^2 + b) - (-\frac{1}{3} + 23b^3 - 5a^7b) =$

La prima parentesi è preceduta da segno − quindi si tolgono le parentesi cambiando il segno ai monomi:

$= -\frac{3}{2}ab - 2ab^2 + (-4a - \frac{1}{3}b^2 + b) - (-\frac{1}{3} + 23b^3 - 5a^7b) =$

Adesso abbiamo una parentesi preceduta dal segno + quindi si tolgono le parentesi lasciando lo stesso segno ai monomi:

$= -\frac{3}{2}ab - 2ab^2 - 4a - \frac{1}{3}b^2 + b - (-\frac{1}{3} + 23b^3 - 5a^7b) =$

Adesso abbiamo una parentesi preceduta da segno − quindi si tolgono le parentesi cambiando il segno ai monomi:

$= -\frac{3}{2}ab - 2ab^2 - 4a - \frac{1}{3}b^2 + b + \frac{1}{3} - 23b^3 + 5a^7b$

Dal momento che non ci sono monomi simili da sommare, l'espressione è finita. Si osservi che le 3 parentesi potevano essere eliminate, seguendo le stesse regole, in un unico passaggio. Abbiamo tolto una parentesi alla volta per far meglio capire il procedimento.

□

1.10 La moltiplicazione fra polinomi

Introduciamo l'argomento della moltiplicazione fra polinomi, iniziando con un caso più semplice: la moltiplicazione di un polinomio per un monomio. Si vedano i seguenti:

Esempi

▷ Effettuare la seguente moltiplicazione:

$$(4a^2b - 3a^3bc) \cdot 2b^3$$

Si osserva che i monomi dentro la parentesi non sono simili e quindi non possono essere sommati fra loro. L'unica possibilità è quindi di usare la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma già vista per gli insiemi numerici. Quindi:

$$(4a^2b - 3a^3bc) \cdot 2b^3 = 4a^2b \cdot 2b^3 - 3a^3bc \cdot 2b^3 =$$

Abbiamo trasformato il prodotto fra un polinomio ed un monomio in una somma di prodotti fra monomi che sappiamo svolgere:

$$= 4a^2b \cdot 2b^3 - 3a^3bc \cdot 2b^3 = 8a^2b^4 - 6a^3b^4c$$

che è il risultato della moltiplicazione.

▷ Effettuare la seguente moltiplicazione:

$$(a^4b - 3ab^3 + 2bc) \cdot (-5ab^3c)$$

Come in precedenza applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma:

$(a^4b - 3ab^3 + 2bc) \cdot (-5ab^3c) = a^4b \cdot (-5ab^3c) - 3ab^3 \cdot (-5ab^3c) + 2bc \cdot (-5ab^3c) =$

$= -5a^5b^4c + 15a^2b^6c - 10ab^4c^2$

$\square$

Gli esempi suggeriscono la seguente:

Regola per la moltiplicazione fra un polinomio ed un monomio. Per effettuare la moltiplicazione fra un polinomio ed un monomio, si moltiplicano per il monomio tutti i monomi appartenenti al polinomio.

Esempi

▷ Effettuare la seguente moltiplicazione: $(-\frac{2}{5}ab + \frac{3}{10}b^2) \cdot \frac{15}{2}a$

$(-\frac{2}{5}ab + \frac{3}{10}b^2) \cdot \frac{15}{2}a = -\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{5}^1}ab \cdot \frac{\cancel{15}^3}{\cancel{2}^1}a + \frac{3}{\cancel{10}^2}b^2 \cdot \frac{\cancel{15}^3}{2}a = -3a^2b + \frac{9}{4}ab^2$

▷ Effettuare la seguente moltiplicazione: $-\frac{2}{9}ac^2 \cdot (-3bc + 6ac^6)$

$-\frac{2}{9}ac^2 \cdot (-3bc + 6ac^6) = +\frac{2}{3}abc^3 - \frac{4}{3}a^2c^8$

(nell'ultimo esempio abbiamo saltato il passaggio intermedio)

$\square$

Prima di andare avanti introduciamo la seguente notazione usata molto spesso:

Notazione. Se in un'espressione:

- compare un monomio e subito dopo si apre una parentesi (esempio: $\mathbf{3a(}a^2 - b)$), oppure
- si chiude una parentesi e subito dopo compare un monomio (esempio: $(a^2 - b\mathbf{)3a}$), oppure
- si chiude una parentesi e subito dopo se ne apre un'altra (esempio: $(a^2 - b\mathbf{)(}3a - 2bc)$)

si sottintende che fra il monomio e la parentesi c'è il simbolo della moltiplicazione (primi 2 casi) o che fra la chiusura della parentesi e l'apertura della successiva parentesi c'è il simbolo della moltiplicazione (terzo caso).

$\square$

Possiamo adesso estendere quanto visto al prodotto fra 2 polinomi, semplicemente applicando 2 volte la proprietà distributiva, come emerge dal seguente esempio:

Esempio

$(a+b)(2a-b+c)$

Si tratta del prodotto di un binomio per un trinomio. Applichiamo la proprietà distributiva al binomio $(a+b)$ rispetto al trinomio $(2a-b+c)$. Quindi:

$(a+b)(2a-b^2+c) = a\cdot(2a-b^2+c)+b\cdot(2a-b^2+c) =$

A questo punto abbiamo due moltiplicazioni fra un monomio ed un polinomio; moltiplicazioni che abbiamo appena imparato a fare:

$= a\cdot(2a-b^2+c)+b\cdot(2a-b^2+c) = 2a^2-ab^2+ac+2ab-b^3+bc$

non essendovi monomi simili la moltiplicazione è terminata.

□

Dall'esempio deduciamo la seguente:

Regola per determinare il prodotto di 2 polinomi. Il prodotto di 2 polinomi equivale al prodotto di un polinomio per tutti i monomi dell'altro polinomio.

Osservazione. Da quanto visto finora segue che il prodotto di 2 polinomi si ottiene determinando il prodotto di tutti i monomi di un polinomio con tutti i monomi dell'altro polinomio.

Esempio

▷ Effettuare la seguente moltiplicazione: $(a^2-ab+b)(2b^3-a-1)$

Si moltiplica il primo monomio del primo polinomio (a^2) con tutti i monomi del secondo polinomio ottenendo $2a^2b^3-a^3-a^2$. Si ripete la stessa operazione moltiplicando il secondo monomio del primo polinomio $(-ab)$ con tutti i monomi del secondo polinomio ottenendo $-2ab^4+a^2b+ab$. Si ripete la stessa operazione col terzo monomio del primo polinomio $(+b)$ ottenendo: $+2b^4-ab-b$. Il prodotto finale risulta quindi:

$$(a^2-ab+b)(2b^3-a-1) = 2a^2b^3-a^3-a^2-2ab^4+a^2b+ab+2b^4-ab-b$$

e non essendoci monomi simili l'operazione è terminata.

Osservazione. Il grado del primo polinomio è 2, mentre quello del secondo è 3. Si osserva che il grado del polinomio prodotto è 5. Ciò non è una coincidenza, infatti il grado del polinomio prodotto è uguale alla somma dei gradi dei 2 polinomi che vengono moltiplicati fra loro.

Osservazione. Dal momento che in un prodotto di polinomi tutti i monomi del primo polinomio vengono moltiplicati per tutti i monomi del secondo polinomio, il numero dei monomi del polinomio risultato è uguale al prodotto del numero dei monomi del primo polinomio per il numero dei monomi del secondo polinomio (a meno che alcuni monomi non risultino simili fra loro).

□

Esempio

▷ Effettuare la seguente moltiplicazione: $(-\frac{2}{3}a+\frac{3}{5}ab)(\frac{15}{4}b^2-2ab^2+5b^5)$

Dalle osservazioni appena fatte possiamo conoscere il grado che ha il polinomio prodotto: infatti il primo polinomio ha grado 2, mentre il secondo ha grado 5. Ci aspettiamo quindi che il polinomio prodotto abbia grado 7 $(2+5=7)$. Inoltre il primo polinomio è formato da 2 monomi e il secondo polinomio da 3. Il polinomio prodotto risulterà quindi composto da 6 monomi $(2\cdot3=6)$. Verifichiamolo:

$$(-\frac{2}{3}a+\frac{3}{5}ab)(\frac{15}{4}b^2-2ab^2+5b^5) = -\frac{5}{2}ab^2+\frac{4}{3}a^2b^2-\frac{10}{3}ab^5+\frac{9}{4}ab^3-\frac{6}{5}a^2b^3+3ab^6$$

il polinomio prodotto ha grado 7 ed è formato da 6 monomi.

□

1.11 I prodotti notevoli

1.11.1 Il quadrato di un binomio

Alcuni tipi di prodotto ricorrono molto spesso tanto da meritare l'appellativo di prodotti notevoli. Fra questi troviamo il quadrato di un binomio. Prima di dare una regola generale affrontiamolo con un esempio:

Esempio

▷ Determinare $(x+3)^2$.

Dal momento che una potenza di esponente 2 significa moltiplicare la base per se stessa 2 volte, risulta:

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) =$$

Sappiamo effettuare il prodotto fra questi 2 binomi:

$$= x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

□

L'esempio appena compiuto ci suggerisce la regola che ci permette di arrivare subito a determinare il quadrato di un binomio senza passare dai passaggi intermedi come invece abbiamo fatto nell'esempio.

Regola del quadrato di un binomio. Il quadrato di un binomio è equivalente al quadrato del primo monomio, più il quadrato del secondo monomio, più il doppio prodotto del primo monomio per il secondo.

In formule, indicati con A e B due monomi qualunque, si ottiene:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

□

Nell'esempio precedente il primo monomio è $+x$ e il secondo monomio è $+3$. Quindi il quadrato del primo monomio è $+x^2$, il quadrato del secondo monomio è $+9$, il prodotto fra il primo e il secondo monomio è $x \cdot 3$ cioè $3x$, quindi il doppio prodotto (che significa il prodotto moltiplicato 2) è $6x$. Quindi, come abbiamo già visto:

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

(è indifferente mettere prima il doppio prodotto o il quadrato del secondo monomio).

Esempi

▷ Determinare $(2x+5)^2$

Il primo monomio è $+2x$ quindi il quadrato del primo monomio è $4x^2$. Il secondo monomio è $+5$ quindi il quadrato del secondo monomio è $+25$. Il prodotto fra il primo e il secondo monomio è $2x \cdot 5$ cioè $10x$, quindi il doppio prodotto è $20x$. Quindi

$$(2x+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$$

▷ Determinare $(2x-5)^2$

Il primo monomio è $+2x$ quindi il quadrato del primo monomio è $4x^2$. Il secondo monomio è -5 quindi il quadrato del secondo monomio è $+25$ (il quadrato è sempre positivo). Il prodotto fra il primo e il secondo monomio è $2x \cdot (-5)$ cioè $-10x$, quindi il doppio prodotto è $-20x$. Quindi

$$(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

▷ Determinare $(-3x-2)^2$

Il primo monomio è $-3x$ quindi il quadrato del primo monomio è $+9x^2$. Il secondo monomio è -2 quindi il quadrato del secondo monomio è $+4$. Il prodotto fra il primo e il secondo monomio è $-3x \cdot (-2)$ cioè $+6x$, quindi il doppio prodotto è $-12x$. Quindi

$$(-3x-2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

▷ Determinare $(7x + \frac{1}{2})^2$

Il primo monomio è $+7x$ quindi il quadrato del primo monomio è $49x^2$. Il secondo monomio è $+\frac{1}{2}$ quindi il quadrato del secondo monomio è $+\frac{1}{4}$. Il prodotto fra il primo e il secondo monomio è $7x \cdot \frac{1}{2}$ cioè $\frac{7}{2}x$, quindi il doppio prodotto è $2 \cdot \frac{7}{2}x = 7x$. Quindi

$$(7x + \frac{1}{2})^2 = 49x^2 + 7x + \frac{1}{4}$$

▷ Determinare $(x^2 + 2xy)^2$

Il primo monomio è $+x^2$ quindi il quadrato del primo monomio è x^4 (potenza di potenza). Il secondo monomio è $+2xy$ quindi il quadrato del secondo monomio è $+4x^2y^2$. Il prodotto fra il primo e il secondo monomio è $x^2 \cdot 2xy$ cioè $2x^3y$, quindi il doppio prodotto è $6x^3y$. Quindi

$$(x^2 + 2xy)^2 = x^4 + 6x^3y + 4x^2y^2$$

□

La regola del quadrato di un binomio può essere estesa (con una certa accortezza) al quadrato di un polinomio con più di 2 termini. Si consideri il seguente:

Esempio

▷ Determinare $(x + 3y + 2)^2$

A differenza degli esempi precedenti, abbiamo il quadrato di un trinomio. Se però poniamo $B = 3y + 2$ possiamo scrivere il precedente quadrato come $(x + B)^2$. Da quanto detto nella regola del quadrato di un binomio risulta:

$$(x + B)^2 = x^2 + 2xB + B^2 =$$

Adesso “risostituiamo” a B il binomio $3y + 2$:

$$= x^2 + 2x(3y + 2) + (3y + 2)^2 =$$

e, dal momento che $2x(3y + 2) = 6xy + 4x$, e $(3y + 2)^2 = 9y^2 + 12y + 4$, si ottiene:

$$= x^2 + 6xy + 4x + 9y^2 + 12y + 4$$

che è il risultato finale.

□

1.11.2 Il prodotto di una somma per una differenza

Un altro prodotto che ricorre molto spesso, e che quindi si merita anch'esso il nome di prodotto notevole, è il prodotto di una somma per una differenza.

Definizione di un prodotto "somma per differenza". Si dice che il prodotto di 2 binomi è una somma per differenza quando i 2 monomi del primo binomio sono uguali (eccetto che per il segno) ai 2 monomi del secondo binomio. Inoltre uno e uno solo dei 2 monomi deve avere nel primo binomio un segno diverso rispetto al secondo binomio.

Esempi

▷ Il prodotto $(3x + 5)(3x - 5)$ è una somma per una differenza in quanto i monomi che formano il primo binomio sono uguali (eccetto che per il segno) a quelli che formano il secondo. Inoltre solo il monomio 5 cambia di segno (nel primo binomio è positivo mentre nel secondo è negativo).

▷ Il prodotto $(-2a + b)(-b + 2a)$ non è una somma per una differenza: infatti nonostante che i monomi che formano il primo binomio sono uguali (eccetto che per il segno) a quelli che formano il secondo, entrambi (e quindi non uno solo) i monomi cambiano di segno ($2a$ nel primo binomio è negativo mentre nel secondo è positivo, e b nel primo binomio è positivo mentre nel secondo è negativo).

▷ Il prodotto $(-2a + b)(b - 2a)$ non è una somma per una differenza: infatti nonostante che i monomi che formano il primo binomio sono uguali a quelli che formano il secondo, nessuno dei 2 monomi cambia di segno ($2a$ è negativo sia nel primo binomio che nel secondo, e b è positivo sia nel primo binomio che nel secondo.

□

Vediamo allora, tramite un esempio, quanto è il prodotto di una somma per una differenza, tramite il seguente:

Esempio

▷ Determinare il prodotto $(a + 2b)(a - 2b)$.

$$(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 2ab + 2ab - 4b^2 = a^2 - 4b^2$$

□

L'esempio ci suggerisce la seguente regola che ci permette di saltare il passaggio intermedio:

Regola per determinare il prodotto di una somma per una differenza. Il prodotto di una somma per una differenza è il quadrato del monomio che non cambia di segno meno il quadrato del monomio che cambia di segno.

Esempi

▷ $(2a - 5b)(2a + 5b)$

è una somma per differenza. Il monomio che non cambia di segno è $2a$ (è sempre positivo), e il monomio che cambia di segno è $5b$. Il quadrato di $2a$ è $4a^2$, mentre il quadrato di $5b$ è $25b^2$. Per la regola appena vista otteniamo:

$$(2a - 5b)(2a + 5b) = 4a^2 - 25b^2$$

▷ $(-2ab-4)(2ab-4)$

è una somma per differenza. Il monomio che non cambia di segno è 4 (è sempre negativo), e il monomio che cambia di segno è $2ab$. Il quadrato di 4 è 16, mentre il quadrato di $2ab$ è 4^2b^2. Per la regola appena vista otteniamo:

$$(-2ab-4)(2ab-4) = 16 - 4a^2b^2$$

▷ $(3-2ab)(-2ab-3)$

è una somma per differenza. Il monomio che non cambia di segno è $2ab$ (è sempre negativo), e il monomio che cambia di segno è 3. Il quadrato di $2ab$ è $4a^2b^2$, mentre il quadrato di 3 è 9. Per la regola appena vista otteniamo:

$$(3-2ab)(-2ab-3) = 4a^2b^2 - 9$$

▷ $(a+3+2b)(a+3-2b)$

A differenza degli altri esempi non abbiamo il prodotto fra 2 binomi ma fra due trinomi. Vediamo come possiamo applicare la regola appena vista in questo caso: si osserva innanzitutto che i monomi del primo trinomio sono uguali (eccetto che per il segno) ai monomi del secondo trinomio. Inoltre il monomio a e il monomio 3 hanno lo stesso segno (positivo) nei 2 trinomi. Poniamo allora $A = a+3$ e sostituiamolo nella moltiplicazione. Si ottiene: $(A+2b)(A-2b)$. Dalla regola della somma per differenza otteniamo:

$$(A+2b)(A-2b) = A^2 - 4b^2$$

Adesso sostituiamo ad A il binomio $a+3$ ottenendo $(a+3)^2-4b^2$. L'espressione contiene il quadrato di un binomio che svolto porta al seguente risultato finale:

$$(a+3)^2 - 4b^2 = a^2 + 6a + 9 - 4b^2$$

che è il risultato della moltiplicazione iniziale.

□

1.11.3 Il triangolo di Tartaglia

Abbiamo iniziato il paragrafo con il quadrato di un binomio, cioè un binomio elevato alla seconda. Ci chiediamo se esistono delle regole per elevare un binomio alla terza (il cubo di un binomio) alla quarta e così via. Tali regole ci sono e sono sempre più complicate via via che sale l'esponente. Uno strumento senz'altro più semplice è il triangolo di Tartaglia.

Il triangolo di Tartaglia è un triangolo costituito da numeri che presenta la seguente struttura:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \square & & & & & & \\
 & & & & & \square & & \square & & & & & \\
 & & & & \square & & \square & & \square & & & & \\
 & & & \square & & \square & & \square & & \square & & & \\
 & & \square & & \square & & \square & & \square & & \square & & \\
 & \square & & \square & & \square & & \square & & \square & & \square & \\
\square & & \square & & \square & & \square & & \square & & \square & & \square \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Al posto di ciascun quadratino dobbiamo sostituire un numero con il criterio che ci apprestiamo a spiegare. I puntini stanno a significare che il triangolo può continuare in basso all'infinito.

Si osservi innanzitutto che nella prima riga c'è un solo quadratino (il vertice del triangolo), nella seconda riga 2 quadratini, nella terza 3 e così via.

Cominciamo con sostituire il numero 1 ai quadratini posti sui lati del triangolo:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & \square & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \square & & \square & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \square & & \square & & \square & & 1 & & \\
 & 1 & & \square & & \square & & \square & & \square & & 1 & \\
1 & & \square & & \square & & \square & & \square & & \square & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & & & & &
\end{array}$$

Osserviamo che ogni quadratino ha sopra di lui due simboli (o numeri o altri quadratini), uno leggermente spostato a sinistra e uno leggermente spostato a destra. Diciamo che questi 2 simboli sono i "genitori" del quadratino. Con questa notazione è molto semplice costruire il triangolo di Tartaglia: cominciando dall'alto, sostituiamo ad ogni quadratino la somma dei numeri dei suoi genitori.

Cominciamo: nella prima riga non ci sono quadratini e quindi nessun numero da sostituire, così come nella seconda. Nella terza c'è un quadratino i cui genitori sono entrambi 1. La somma è quindi 2 che sostituiamo al quadratino.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \square & & \square & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \square & & \square & & \square & & 1 & & \\
 & 1 & & \square & & \square & & \square & & \square & & 1 & \\
1 & & \square & & \square & & \square & & \square & & \square & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & & & & &
\end{array}$$

Passiamo alla quarta riga: il quadratino più a sinistra ha come genitori 1 e 2, quindi la somma da sostituire è 3, e l'altro quadratino ha come genitori 2 e 1, quindi anche in questo caso la somma da sostituire è 3.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \square & & \square & & \square & & 1 & & \\
 & 1 & & \square & & \square & & \square & & \square & & 1 & \\
1 & & \square & & \square & & \square & & \square & & \square & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & & & & &
\end{array}$$

Continuando con questo criterio si ottiene:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & & & & &
\end{array}$$

Questo triangolo che può sembrare molto particolare, è estremamente utile in molte applicazioni: una delle quali, quella che ora ci interessa, è per determinare la potenza di un binomio. Vediamo come, prendendo ad esempio il quadrato di un binomio:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

e notiamo i coefficienti, che nell'ordine sono: 1; 2; 1. Si guardi ora la terza riga del triangolo di Tartaglia che è formata dagli stessi numeri: 1; 2; 1.

Consideriamo adesso il cubo di un binomio, cioè un binomio elevato alla terza:

$(A+B)^3 = (A+B)^2(A+B) = (A^2+2AB+B^2)(A+B) =$

$= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

e ancora una volta notiamo i coefficienti che, nell'ordine sono: 1; 3; 3; 1. Si osservi ora la quarta riga del triangolo di Tartaglia che è formata dagli stessi numeri: 1; 3; 3; 1.

Torniamo indietro e notiamo che se eleviamo $(A+B)$ alla prima si ottiene naturalmente:

$$(A+B)^1 = A+B$$

e i coefficienti sono: 1; 1 come la seconda riga del triangolo di Tartaglia. Inoltre, dato che una potenza con qualunque base diversa da 0 elevata alla 0, è sempre 1 risulta che:

$$(A+B)^0 = 1$$

e il coefficiente è 1 come la prima riga del triangolo di Tartaglia.

Questi esempi ci suggeriscono la seguente regola:

Regola per determinare i coefficienti del binomio $(A+B)^n$**.** I coefficienti di $(A+B)^n$ sono dati dalla riga $n+1$esima del triangolo di Tartaglia.

□

Ovviamente c'è una precisazione importantissima da fare: la regola appena data vale soltanto se scriviamo i monomi in un preciso ordine. Chiariamo quanto detto tornando al quadrato del binomio $A+B$. Se scriviamo:

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

non commettiamo nessun errore, però i coefficienti sono nell'ordine: 1; 1; 2 che è un ordine diverso da quello dato dal triangolo di Tartaglia. Affinché la precedente regola abbia valore i monomi devono essere scritti in un ordine preciso. Cerchiamo di capire quale. Abbiamo appena visto che:

$(A+B)^2$ è uguale alla somma di 3 monomi (A^2; $2AB$; B^2) ciascuno di grado 2.

$(A+B)^3$ è uguale alla somma di 4 monomi (A^3; $3A^2B$; $3AB^2$; B^2) ciascuno di grado 3.

"Per induzione" possiamo quindi dedurre che $(A+B)^4$ sarà uguale alla somma di 5 monomi ciascuno di grado 4; $(A+B)^5$ sarà uguale alla somma di 6 monomi ciascuno di grado 5 e così via.

L'ordine con cui dobbiamo scrivere i monomi di una qualunque potenza del binomio $A+B$ è il seguente: prima si scrive A elevato allo stesso esponente del binomio; poi AB con A elevato all'esponente del binomio meno uno e B elevato alla prima; poi AB con A elevato all'esponente del binomio meno due e B elevato alla seconda e così via fino a che A scompare (perché elevato ad esponente 0) e rimane B elevato all'esponente del binomio. Chiariamo con un esempio:

Esempio

▷ Determinare $(A+B)^5$.

Per quanto dedotto prima $(A+B)^5$ sarà uguale alla somma di 6 monomi ciascuno di grado 5. Decidiamo l'ordine dei monomi secondo quanto appena visto: prima si scrive A elevato allo stesso esponente del binomio, e quindi A^5; poi AB con A elevato all'esponente del binomio (in questo caso 5) meno uno (quindi 4) e B elevato alla prima, quindi A^4B; poi AB con A elevato all'esponente del binomio meno due (e quindi 3) e B elevato alla seconda e quindi A^3B^2, poi A^2B^3; poi AB^4 e infine B^5. Quindi se scriviamo i monomi in questo ordine:

$A^5 \quad A^4B \quad A^3B^2 \quad A^2B^3 \quad AB^4 \quad B^5$

i coefficienti di $(A+B)^5$ coincidono con la sesta riga del triangolo di Tartaglia. Risulta:

$$(A+B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$$

▷ Determinare $(x+2)^5$

Il problema è uguale al precedente soltanto che al posto di A abbiamo x e al posto di B abbiamo $+2$. È quindi sufficiente effettuare queste sostituzioni nella potenza del binomio:

$$(x+2)^5 = x^5 + 5x^4 \cdot 2 + 10x^3 \cdot 2^2 + 10x^2 \cdot 2^3 + 5x \cdot 2^4 + 2^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

▷ Determinare $(2x-1)^4$

Questa volta abbiamo al posto di A, $2x$ e al posto di B abbiamo -1 (e quindi dovremo stare particolarmente attenti ai segni).

Tramite il triangolo di Tartaglia possiamo scrivere:

$$(A+B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$$

Quindi sostituendo:

$$(2x-1)^4 = (2x)^4 + 4\cdot(2x)^3\cdot(-1) + 6(2x)^2\cdot(-1)^2 + 4(2x)(-1)^3 + (-1)^4 = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$$

□

1.12 La divisione di un polinomio per un monomio

Come per la divisione fra monomi, anche la divisione fra un polinomio e un monomio non è sempre effettuabile. Vale il seguente criterio:

Criterio di divisibilità fra un polinomio e un monomio. È possibile effettuare la divisione fra un polinomio ed un monomio solo se tutti i monomi che compongono il polinomio dividendo sono divisibili per il monomio divisore.

Esempi

▷ La divisione $(2a^2b^3 - 3a^3b - 5a^2b^4) : (3a^2b^2)$ non si può effettuare in quanto il secondo monomio del polinomio $(-3a^3b)$ non è divisibile per il monomio divisore $(3a^2b^2)$ perché nel monomio divisore la lettera b compare con esponente maggiore.

▷ La divisione $(2a^2b^3 - 3a^3b^4 - 5a^2b^4) : (3a^2b^2)$ si può effettuare in quanto tutti i monomi del polinomio dividendo sono divisibili per il monomio divisore.

□

Regola per determinare il quoziente fra un polinomio ed un monomio. Il quoziente di un polinomio per un monomio è dato dalla somma algebrica dei quozienti fra tutti i monomi del polinomio dividendo e il monomio divisore.

Esempio

▷ Determinare il quoziente di $(2a^2b^3 - 3a^3b^4 - 5a^2b^4) : (3a^2b^2)$

Seguendo la regola si ottiene che:

$$(2a^2b^3 - 3a^3b^4 - 5a^2b^4) : (3a^2b^2) = 2a^2b^3 : (3a^2b^2) - 3a^3b^4 : (3a^2b^2) - 5a^2b^4 : (3a^2b^2) = \frac{2}{3}b - ab^2 - \frac{5}{3}b^2$$

▷ Determinare il quoziente di $(\frac{2}{3}a^2b^3 - \frac{3}{5}a^3b) : (-\frac{3}{8}a^2b)$

Seguendo la regola si ottiene che:

$$(\frac{2}{3}a^2b^3 - \frac{3}{5}a^3b) : (-\frac{3}{8}a^2b) = \frac{2}{3}a^2b^3 : (-\frac{3}{8}a^2b) - \frac{3}{5}a^3b : (-\frac{3}{8}a^2b) =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3}b^2 + \frac{\cancel{3}^1}{5} \cdot \frac{8}{\cancel{3}^1}a = -\frac{16}{9}b^2 + \frac{8}{5}a$$

$\square$

1.13 La divisione fra 2 polinomi

A differenza che per la moltiplicazione, la divisione fra polinomi non è un'estensione del procedimento visto per la divisione fra un polinomio ed un monomio, anzi il modo di procedere è completamente diverso. Premettiamo che tratteremo soltanto divisioni fra polinomi aventi una sola lettera, in quanto la divisione fra polinomi con più lettere è decisamente più difficile. Consideriamo inizialmente il seguente:

Esempio Effettuare la divisione 21 : 5

Il risultato (cioè il quoziente) è ovviamente 4 con resto 1.

Se volessimo effettuare la riprova (cioè la verifica della correttezza della divisione) dovremmo moltiplicare il quoziente (4) per il divisore (5) e al risultato aggiungere il resto (1). Se tale operazione ha come risultato il dividendo (21) la divisione è esatta. Vediamolo:

$$4 \cdot 5 + 1 = 20 + 1 = 21$$

quindi la divisione è corretta.

$\square$

L'esempio ci ricorda come effettuare la verifica di una divisione:

Regola per verificare la correttezza di una divisione. Una divisione è esatta se moltiplicando il quoziente per il divisore e sommando il resto, si ottiene il dividendo.

$\square$

Torniamo adesso ai polinomi dando la seguente:

Regola per la divisibilità fra 2 polinomi. Un polinomio (dividendo) può essere diviso per un polinomio (divisore) se e soltanto se il grado del polinomio dividendo non è minore del grado del polinomio divisore.

$\square$

Capiamo adesso come si esegue una divisione fra polinomi tramite il seguente:

Esempio

▷ Effettuare la divisione $(3x^3 - 2x^2 + x - 3) : (x^2 + 2x - 1)$

Innanzitutto osserviamo che il grado del dividendo è 3 mentre quello del divisore è 2, quindi la divisione può essere effettuata. Mettiamo in tabella la divisione:

$$\begin{array}{rrrr|rrr} 3x^3 & -2x^2 & +x & -3 & x^2 & +2x & -1 \\ \cline{5-7} & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

Adesso consideriamo il monomio di grado maggiore del dividendo ($3x^3$) e dividiamolo per il monomio di grado maggiore del divisore (x^2). Il risultato è $3x$ che mettiamo sotto il divisore:

$$\begin{array}{rrrr|rrr} 3x^3 & -2x^2 & +x & -3 & x^2 & +2x & -1 \\ \cline{5-7} & & & & 3x & & \\ & & & & & & \end{array}$$

Adesso moltiplichiamo $3x$ per il primo monomio del divisore (x^2), otteniamo $+3x^3$, gli cambiamo il segno (ottenendo $-3x^3$) e lo scriviamo sotto il monomio di grado 3 del dividendo. Ripetiamo il procedimento moltiplicando $3x$ per il secondo monomio del divisore ($2x$). Otteniamo $+6x^2$, gli cambiamo il segno ($-6x^2$) e lo scriviamo sotto il monomio di grado 2 del dividendo. E infine si moltiplica $3x$ per il terzo monomio del divisore (-1), otteniamo $-3x$, gli cambiamo il segno (ottenendo $+3x$) e lo scriviamo sotto il monomio di grado 1 del dividendo:

$$\begin{array}{rrrr|rrr} 3x^3 & -2x^2 & +x & -3 & x^2 & +2x & -1 \\ \cline{5-7} -3x^3 & -6x^2 & +3x & & 3x & & \\ \cline{1-3} & & & & & & \end{array}$$

Adesso effettuiamo la somma:

$$\begin{array}{rrrr|rrr} 3x^3 & -2x^2 & +x & -3 & x^2 & +2x & -1 \\ \cline{5-7} -3x^3 & -6x^2 & +3x & & 3x & & \\ \cline{1-3} // & -8x^2 & +4x & & & & \end{array}$$

Abbassiamo il termine del divisore -3:

$$\begin{array}{rrrr|rrr} 3x^3 & -2x^2 & +x & -3 & x^2 & +2x & -1 \\ \cline{5-7} -3x^3 & -6x^2 & +3x & & 3x & & \\ \cline{1-3} // & -8x^2 & +4x & -3 & & & \end{array}$$

Abbiamo ottenuto il polinomio $-8x^2+4x-3$. Dal momento che è di grado non minore del divisore dobbiamo continuare procedendo come in precedenza: si divide $-8x^2$ per x^2 ottenendo -8 che scriviamo accanto al termine trovato in precedenza ($3x$):

$$\begin{array}{rrrr|lll}
3x^3 & -2x^2 & +x & -3 & x^2 & +2x & -1 \\ \cline{5-7}
-3x^3 & -6x^2 & +3x & & 3x & -8 & \\ \cline{1-3}
// & -8x^2 & +4x & -3 & & &
\end{array}$$

Nuovamente moltiplichiamo il termine trovato (-8) per tutti i monomi del divisore. Cambiamo tutti i segni e i monomi ottenuti si mettono ordinatamente (cioè ciascuno sotto il suo grado) sotto il polinomio $-8x^2 + 4x - 3$:

$$\begin{array}{rrrr|lll}
3x^3 & -2x^2 & +x & -3 & x^2 & +2x & -1 \\ \cline{5-7}
-3x^3 & -6x^2 & +3x & & 3x & -8 & \\ \cline{1-3}
// & -8x^2 & +4x & -3 & & & \\
 & +8x^2 & +16x & -8 & & & \\ \cline{2-4}
\end{array}$$

Effettuiamo la somma e otteniamo:

$$\begin{array}{rrrr|lll}
3x^3 & -2x^2 & +x & -3 & x^2 & +2x & -1 \\ \cline{5-7}
-3x^3 & -6x^2 & +3x & & 3x & -8 & \\ \cline{1-3}
// & -8x^2 & +4x & -3 & & & \\
 & +8x^2 & +16x & -8 & & & \\ \cline{2-4}
 & // & +20x & -11 & & &
\end{array}$$

Il polinomio $20x - 11$ è di grado minore del grado del divisore e quindi il procedimento termina. Il risultato della divisione (il polinomio quoziente) è $3x - 8$, ed il resto è $20x - 11$.

Come abbiamo visto nell'esempio numerico, per effettuare la verifica bisogna moltiplicare il quoziente per il divisore e al risultato sommare il resto. Se al termine abbiamo ottenuto il dividendo la divisione è stata svolta correttamente. Verifichiamolo:

$$\underbrace{(3x-8)}_{\text{quoziente}} \cdot \underbrace{(x^2+2x-1)}_{\text{divisore}} + \underbrace{(20x-11)}_{\text{resto}} = 3x^3+6x^2-3x-8x^2-16x+8+20x-11 = \underbrace{3x^3-2x^2+x-3}_{\text{dividendo}}$$

quindi la divisione è corretta.

$\square$

L'esempio ci suggerisce 2 importanti osservazioni:

Osservazione sul grado del quoziente. Il grado del polinomio quoziente è uguale alla differenza fra il grado del polinomio dividendo e il grado del polinomio divisore.

$\square$

Osservazione sul grado del resto. Il grado del polinomio resto è sempre minore del grado del polinomio divisore.

$\square$

Per proseguire sono importanti le due seguenti definizioni:

Definizione di polinomio ordinato. Un polinomio si dice ordinato se i monomi sono disposti in modo che gli esponenti siano in ordine decrescente.

Esempi

▷ $3x^4 - 12x^2 + 3x + 5$ è ordinato perché gli esponenti (4; 2; 1; 0) sono in ordine decrescente.

▷ $3x^4 + 3x + 5 - 12x^2$ non è ordinato perché gli esponenti (4; 1; 0; 2) non sono in ordine decrescente.

□

Definizione di polinomio completo. Un polinomio si dice completo se sono presenti tutti gli esponenti dal grado 0 al grado massimo.

Esempi

▷ $3x^4 - 12x^2 + 3x + 5$ non è completo perché fra l'esponente massimo (4) e 0 manca l'esponente 3.

▷ $3x^4 + 3x^3 + 5x - 12x^2$ non è completo perché fra l'esponente massimo (4) e 0 manca l'esponente 0.

▷ $3x + 5 - 12x^2$ è completo perché sono presenti tutti gli esponenti fra l'esponente massimo (2) e 0.

□

Nell'esempio visto di divisione fra polinomi, sia il dividendo che il divisore erano ordinati e completi. Per effettuare una divisione fra polinomi non ordinati o non completi bisogna seguire la seguente:

Regola per la divisione fra polinomi non ordinati o non completi. Per effettuare una divisione fra 2 polinomi essi devono essere messi in tabella ordinati. Nel caso uno dei due (o entrambi) non siano completi bisogna mettere, al posto del grado mancante, uno 0.

Esempio

▷ $(6x^2 + 2x - 4x^4) : (2x^2 + 4x - 4)$

Si osserva che il dividendo non è ordinato, e quindi bisogna riscrivere la divisione con i polinomi ordinati:

$$(-4x^4 + 6x^2 + 2x) : (2x^2 + 4x - 4).$$

Inoltre il polinomio non è completo mancando l'esponente 3 e l'esponente 0 (il termine noto). In tabella dobbiamo mettere degli 0 in corrispondenza di queste "mancanze":

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
-4x^4 & 0 & +6x^2 & +2x & 0 & 2x^2 & +4x & -4 \\
\cline{6-8}
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & &
\end{array}$$

Adesso possiamo procedere come nell'esempio precedente svolgendo la divisione fra il monomio di grado massimo del dividendo ($-4x^4$) e quello di grado massimo del divisore ($2x^2$). Otteniamo $-2x^2$ che va posto nello spazio destinato al quoziente

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
-4x^4 & 0 & +6x^2 & +2x & 0 & 2x^2 & +4x & -4 \\ \cline{6-8}
 & & & & & -2x^2 & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
\end{array}
$$

Adesso moltiplichiamo $-2x^2$ per tutti i monomi del divisore, ricordando di cambiare il segno, e disponiamo i monomi ottenuti in modo ordinato sotto i relativi termini del dividendo e effettuiamo la somma:

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
-4x^4 & 0 & +6x^2 & +2x & 0 & 2x^2 & +4x & -4 \\ \cline{6-8}
+4x^2 & +8x^3 & -8x^2 & & & -2x^2 & & \\ \cline{1-3}
// & +8x^3 & -2x^2 & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
\end{array}
$$

Abbassiamo il $+2x$ ottenendo il polinomio $+8x^3 - 2x^2 + 2x$. Essendo di grado non minore del divisore dobbiamo continuare: dividiamo $+8x^3$ per $2x^2$ ottenendo $4x$ che mettiamo accanto a $-2x^2$. Moltiplichiamo poi $4x$ per tutti i monomi del divisore, ricordando di cambiare il segno, e disponiamo i monomi ottenuti in modo ordinato sotto i relativi termini del dividendo e effettuiamo la somma:

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
-4x^4 & 0 & +6x^2 & +2x & 0 & 2x^2 & +4x & -4 \\ \cline{6-8}
+4x^2 & +8x^3 & -8x^2 & & & -2x^2 & +4x & \\ \cline{1-3}
// & +8x^3 & -2x^2 & +2x & & & & \\
 & -8x^3 & -16x^2 & +16x & & & & \\ \cline{2-4}
 & // & -18x^2 & +18x & & & & \\
 & & & & & & & \\
\end{array}
$$

Abbassiamo lo 0 ottenendo il polinomio $-18x^2 + 18x$. Essendo di grado non minore del divisore dobbiamo continuare: dividiamo $-18x^2$ per $2x^2$ ottenendo -9 che mettiamo accanto a $-2x^2 + 4x$. Moltiplichiamo poi -9 per tutti i monomi del divisore, ricordando di cambiare il segno, e disponiamo i monomi ottenuti in modo ordinato sotto i relativi termini del dividendo e effettuiamo la somma:

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
-4x^4 & 0 & +6x^2 & +2x & 0 & 2x^2 & +4x & -4 \\ \cline{6-8}
+4x^2 & +8x^3 & -8x^2 & & & -2x^2 & +4x & -9 \\ \cline{1-3}
// & +8x^3 & -2x^2 & +2x & & & & \\
 & -8x^3 & -16x^2 & +16x & & & & \\ \cline{2-4}
 & // & -18x^2 & +18x & 0 & & & \\
 & & +18x^2 & +36x & -36 & & & \\
 & & // & 54x & -36 & & & \\
\end{array}
$$

Il polinomio $54x - 36$ è di grado minore del grado del divisore e quindi il procedimento termina. Il risultato della divisione (il polinomio quoziente) è $-2x^2 + 4x - 9$, ed il resto è $54x - 36$.

Osserviamo che il grado del quoziente è uguale alla differenza fra il grado del dividendo e quello del divisore. Inoltre osserviamo che il grado del resto (1) è minore del grado del divisore (che è 2).

Se volessimo effettuare la verifica dovremmo moltiplicare il quoziente $(-2x^2 + 4x - 9)$ per il divisore $(2x^2 + 4x - 4)$ e al risultato sommare il resto $(54x - 36)$. Se al termine otteniamo il dividendo

$(-4x^4 + 6x^2 + 2x)$ la divisione è corretta.

$\square$

1.14 La divisione fra 2 polinomi col metodo di Ruffini

Nel caso che in una divisione il divisore:

1. sia di primo grado
2. abbia come coefficiente dell'incognita 1

è possibile effettuare la divisione col metodo di Ruffini (più avanti vedremo che la seconda condizione non è necessaria). Spieghiamo questo metodo tramite un esempio:

Esempio

▷ Effettuare col metodo di Ruffini: $(3x^3 - 5x^2 + 6x - 4) : (x - 2)$

Incominciamo a disegnare una struttura così fatta:

$$\begin{array}{c|c|c} & & \\ & & \\ \hline & & \end{array}$$

Sopra la riga orizzontale e a sinistra della prima linea verticale mettiamo il termine noto del divisore cambiato di segno (essendo il termine noto -2, scriviamo $+2$):

$$\begin{array}{c|c|c} & & \\ +2 & & \\ \hline & & \end{array}$$

Nella riga in alto, cominciando a destra della prima riga verticale, mettiamo ordinatamente i coefficienti (e solo i coefficienti!) del polinomio dividendo, facendo in modo che il suo termine noto sia l'unico numero posto a destra della seconda riga verticale:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -5 & +6 & -4 \\ & & & & \\ +2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Il primo numero è 3, che abbassiamo sotto la linea orizzontale:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -5 & +6 & -4 \\ & & & & \\ +2 & & & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

A questo punto comincia il procedimento: si moltiplica il 3 appena abbassato per $+2$ (il termine noto del divisore cambiato di segno) e si scrive il risultato $+6$ sotto il termine immediatamente a destra di 3, cioè -5:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -5 & +6 & -4 \\ & & & & \\ +2 & & +6 & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

Si esegue la somma fra -5 e $+6$ e si scrive il risultato, $+1$, sotto la linea orizzontale:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -5 & +6 & -4 \\ & & & & \\ +2 & & +6 & & \\ \hline & 3 & +1 & & \end{array}$$

A questo punto ripetiamo l'operazione fatta col 3, per il $+1$ appena trovato: si moltiplica $+1$ per $+2$ ed il risultato ottenuto ($+2$) si mette sotto il termine subito alla destra di -5 cioè $+6$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -5 & +6 & -4 \\ & & & & \\ +2 & & +6 & +2 & \\ \hline & 3 & +1 & & \end{array}$$

Si esegue la somma fra il $+2$ appena trovato e $+6$. Il risultato, $+8$, si scrive sotto la linea orizzontale:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -5 & +6 & -4 \\ & & & & \\ +2 & & +6 & +2 & \\ \hline & 3 & +1 & +8 & \end{array}$$

Si moltiplica $+8$ per $+2$ ed il risultato ottenuto, $+16$, va scritto sotto -4 subito a destra della linea verticale:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -5 & +6 & -4 \\ & & & & \\ +2 & & +6 & +2 & +16 \\ \hline & 3 & +1 & +8 & \end{array}$$

Si esegue l'addizione fra $+16$ e -4 e il risultato, $+12$, si scrive sotto la linea orizzontale:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -5 & +6 & -4 \\ & & & & \\ +2 & & +6 & +2 & +16 \\ \hline & 3 & +1 & +8 & +12 \end{array}$$

A questo punto il procedimento è terminato.

Per capire il quoziente e il resto della divisione bisogna ricordarsi delle osservazioni fatte nel paragrafo precedente e cioè che il grado del quoziente è uguale alla differenza fra il grado del dividendo e quello del divisore e che il grado del resto è sempre inferiore al grado del divisore. Dal momento che il metodo di Ruffini si può applicare solo se il divisore ha grado 1 risulta che:

- Il quoziente ha sempre grado uguale a quello del dividendo meno 1

- Il grado del resto, dovendo essere minore di 1, non può altro che essere 0. Quindi il resto è sempre un numero.

Quindi in questo esempio il quoziente ha grado 2; e il resto è un numero.

Col metodo di Ruffini, fra le due linee verticali, ci sono i coefficienti del quoziente in ordine decrescente di grado, e il numero subito a destra della linea verticale è il resto.

Abbiamo quindi che il quoziente è: $Q = 3x^2 + x + 8$ e il resto: $R = +14$.

▷ Effettuare col metodo di Ruffini: $(x^2 - 3x^4 + 45) : (x + 2)$

Si osserva immediatamente che il polinomio dividendo non è né ordinato né completo: va quindi ordinato e, al posto dei gradi mancanti, va scritto uno 0:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -3 & 0 & +1 & 0 & +45 \\ & & & & & \\ -2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

(si osservi che lo 0 è stato messo in corrispondenza dei coefficienti di terzo grado e di primo grado che sono quelli che mancano nel polinomio dividendo. Inoltre abbiamo scritto -2 a sinistra, sopra la linea orizzontale, in quanto il termine noto del divisore è $+2$).

Si abbassa -3 e si moltiplica per -2. Il risultato, $+6$, va scritto sotto il primo 0:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -3 & 0 & +1 & 0 & +45 \\ & & & & & \\ -2 & & +6 & & & \\ \hline & -3 & & & & \end{array}$$

Si effettua la somma fra 0 e $+6$ (il risultato è $+6$) e si scrive sotto la linea orizzontale. Si moltiplica poi per -2 ottenendo -12 che va scritto sotto $+1$:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -3 & 0 & +1 & 0 & +45 \\ & & & & & \\ -2 & & +6 & -12 & & \\ \hline & -3 & +6 & & & \end{array}$$

Si effettua la somma fra $+1$ e -12 (il risultato è -11) e si scrive sotto la linea orizzontale. Si moltiplica poi per -2 ottenendo $+22$ che va scritto sotto lo 0:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -3 & 0 & +1 & 0 & +45 \\ & & & & & \\ -2 & & +6 & -12 & +22 & \\ \hline & -3 & +6 & -11 & & \end{array}$$

Si effettua la somma fra 0 e $+22$ (il risultato è $+22$) e si scrive sotto la linea orizzontale. Si moltiplica poi per -2 ottenendo -44 che va scritto a destra della linea verticale:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -3 & 0 & +1 & 0 & +45 \\ & & & & & \\ -2 & & +6 & -12 & +22 & -44 \\ \hline & -3 & +6 & -11 & +22 & \end{array}$$

Si effettua la somma fra $+45$ e -44 (il risultato è $+1$) e si scrive sotto la linea orizzontale. Il procedimento è terminato:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -3 & 0 & +1 & 0 & +45 \\ & & & & & \\ -2 & & +6 & -12 & +22 & -44 \\ \hline & -3 & +6 & -11 & +22 & +1 \end{array}$$

Il polinomio dividendo è di quarto grado e quindi il polinomio quoziente è di terzo grado. I suoi coefficienti sono dati dai numeri conpresi fra le 2 linee verticali, sotto la linea orizzontale. Quindi il primo numero, -3, è il coefficiente di x^3, $+6$ è il coefficiente di x^2, -11 è il coefficiente di x^1 (cioè x), $+22$ è il termine noto, mentre il numero fuori dalle linee verticali è il resto. Quindi:

$$Q = -3x^3 + 6x^2 - 11x + 22 \qquad R = +1$$

□

Se volessimo effettuare la riprova il procedimento è ovviamente analogo a quello visto nel paragrafo precedente: si effettua il prodotto fra il polinomio quoziente ed il polinomio divisore e si aggiunge il resto. Se il risultato complessivo equivale al polinomio dividendo significa che la divisione è stata svolta correttamente (altrimenti o è sbagliata la divisione o la riprova).

Nell'ultimo esempio la verifica è:

$$\underbrace{(-3x^3 + 6x^2 - 11x + 22)}_{\text{quoziente}} \cdot \underbrace{(x+2)}_{\text{divisore}} + \underbrace{(+1)}_{\text{resto}} = -3x^4 - 6x^3 + 6x^3 + 12x^2 - 11x^2 - 22x + 22x + 44 + 1 =$$

$$= \underbrace{-3x^4 + x^2 + 45}_{\text{dividendo}}$$

quindi la divisione è corretta.

□

All'inizio del paragrafo abbiamo detto che, poter effettuare una divisione col metodo di Ruffini, la condizione che il coefficiente di x deve essere 1 non è necessaria. Ciò è conseguenza della seguente proprietà:

Proprietà invariantiva della divisione. Siano A e B due polinomi e c un numero. Il quoziente della divisione $A : B$ è equivalente al quoziente della divisione $\frac{A}{c} : \frac{B}{c}$ (in altre parole se dividiamo sia il dividendo che il divisore per uno stesso numero, il quoziente non cambia).

Dimostrazione.

$$\frac{A}{c} : \frac{B}{c} = \frac{A}{\cancel{c}^{\,1}} \cdot \frac{\cancel{c}^{\,1}}{B} = \frac{A}{B} = A : B$$

□

Possiamo allora dare la seguente regola:

Regola. Se in una divisione fra polinomi il divisore è di primo grado ma il coefficiente di x è diverso da 1, si può ugualmente effettuare la divisione col metodo di Ruffini a condizione di dividere sia il polinomio dividendo che il polinomio divisore per il coefficiente di x.

Esempio

▷ Effettuare la divisione $(9x^3 - 4x + 3) : (3x + 2)$

Il coefficiente di x nel divisore è 3. La proprietà invariantiva della divisione ci assicura che se dividiamo sia il polinomio dividendo che il polinomio divisore per 3 il quoziente non cambia. Dividiamo allora per 3 il dividendo e il divisore:

$$(9x^3 - 4x + 3) : 3 = 3x^3 - \frac{4}{3}x + 1; \qquad (3x + 2) : 3 = x + \frac{2}{3}$$

A questo punto abbiamo trasformato la divisione originale in una ad essa equivalente:

$$(3x^3 - \frac{4}{3}x + 1) : (x + \frac{2}{3})$$

che sappiamo risolvere col metodo di Ruffini (non deve spaventarci la presenza delle frazioni che vanno trattate allo stesso modo dei coefficienti interi).

□

1.15 La scomposizione di un polinomio

Il termine scomposizioni ci fa ricordare la scomposizione in fattori primi dei numeri naturali. In essa il numero naturale veniva scritto come un prodotto in cui i fattori erano numeri primi o potenze di numeri primi. Così, ad esempio, la scomposizione di 90 è:

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

La scomposizione è un passaggio molto importante nella determinazione di M.C.D. e m.c.m, nelle semplificazioni etc.

Ci chiediamo adesso cosa significa scomporre un polinomio:

Significato di scomposizione di un polinomio. Scomporre un polinomio vuol dire scriverlo come prodotto di polinomi di grado minore.

□

Nella scomposizione dei numeri naturali ci sono dei numeri che non si possono scomporre perché divisibili solo per 1 o per se stessi. Tali numeri sono i numeri primi. Un concetto analogo esiste nella scomposizione dei polinomi:

Definizione di polinomio irriducibile. Un polinomio che non si può scomporre si dice irriducibile.

□

Osservazione. Risulta quindi chiaro che un polinomio di grado 1 è irriducibile.

□

Affronteremo 5 metodi per la scomposizione dei polinomi.

1.15.1 Il raccoglimento a fattor comune (o raccoglimento totale)

Il raccoglimento a fattor comune consiste nel determinare il Massimo Comun Divisore fra tutti i monomi del polinomio da scomporre (vedi paragrafo 1.7) e di **metterlo in evidenza**, cioè di scriverlo come fattore di un prodotto in cui l'altro fattore è il polinomio che si ottiene dividendo il polinomio di partenza per il M.C.D. determinato. Chiariamo quanto detto con degli esempi:

Esempi

▷ Scomporre il polinomio $3x^5 + 2x^2 - 5x$.

Si osserva che il M.C.D. fra $3x^5$; $+2x^2$ e $-5x$ è x e quindi può essere messo in evidenza. Bisogna quindi determinare il polinomio che deriva dalla divisione fra $3x^5 + 2x^2 - 5x$ e x. Dato che $3x^5 + 2x^2 - 5x : x = 3x^4 + 2x - 5$ risulta che:

$$3x^5 + 2x^2 - 5x = x(3x^4 + 2x - 5)$$

È facile osservare che se effettuiamo il prodotto fra x e $3x^4 + 2x - 5$ otteniamo il polinomio di partenza.

Inoltre abbiamo scritto il polinomio $3x^5 + 2x^2 - 5x$ di grado 5, come il prodotto fra il polinomio x di grado 1, e il polinomio $3x^4 + 2x - 5$ di grado 4. Abbiamo cioè scritto il polinomio come un prodotto di 2 polinomi di grado minore, e quindi l'abbiamo scomposto come era nei nostri obiettivi.

Osserviamo che determinare il M.C.D. dei monomi che costituiscono il polinomio equivale a ricercare un fattore comune a tutti i monomi. Per questo il metodo prende il nome di raccoglimento a fattor comune.

▷ Scomporre il polinomio $-4a^4 + 2a^3 + 22a^2$.

Il M.C.D. fra $-4a^4$; $+2a^3$ e $+22a^2$ è $2a^2$ e quindi può essere messo in evidenza. Bisogna quindi determinare il polinomio che deriva dalla divisione:

$$(-4a^4 + 2a^3 + 22a^2) : (2a^2) = -2a^2 + a + 11$$

quindi:

$$-4a^4 + 2a^3 + 22a^2 = 2a^2(-2a^2 + a + 11)$$

Abbiamo scritto il polinomio $-4a^4 + 2a^3 + 22a^2$ di grado 4, come il prodotto fra il polinomio $2a^2$ di grado 2, e il polinomio $-2a^2 + a + 11$ anch'esso di grado 2. Abbiamo cioè scritto il polinomio come un prodotto di 2 polinomi di grado minore e quindi l'abbiamo scomposto.

▷ Scomporre il polinomio $7a^4b^2 - 2a^3b^5$.

Il M.C.D. fra $7a^4b^2$ e $-2a^3b^5$ è a^3b^2 e quindi può essere messo in evidenza. Bisogna quindi determinare il polinomio che deriva dalla divisione:

$$(7a^4b^2 - 2a^3b^5) : (a^3b^2) = 7a - 2b^3$$

quindi:

$$7a^4b^2 - 2a^3b^5 = a^3b^2(7a - 2b^3)$$

Abbiamo scritto il polinomio $7a^4b^2 - 2a^3b^5$ di grado 8, come il prodotto fra il polinomio a^3b^2 di grado 5, e il polinomio $7a - 2b^3$ di grado 3. Abbiamo cioè scritto il polinomio come un prodotto di 2 polinomi di grado minore e quindi l'abbiamo scomposto.

▷ Scomporre il polinomio $5x^3y^2 - 2y^2 - 2x^4y^5$.

Il M.C.D. fra $5x^3y^2$; $-2y^2$ e $-2x^4y^5$ è y^2 e quindi può essere messo in evidenza. Bisogna quindi determinare il polinomio che deriva dalla divisione:

$$(5x^3y^2 - 2y^2 - 2x^4y^5) : (y^2) = 5x^3 - 2 - 2x^4y^3$$

quindi:

$$5x^3y^2 - 2y^2 - 2x^4y^5 = y^2(5x^3 - 2 - 2x^4y^3)$$

Abbiamo scritto il polinomio $5x^3y^2 - 2y^2 - 2x^4y^5$ di grado 9, come il prodotto fra il polinomio y^2 di grado 2, e il polinomio $5x^3 - 2 - 2x^4y^3$ di grado 7. Abbiamo cioè scritto il polinomio come un prodotto di 2 polinomi di grado minore e quindi l'abbiamo scomposto.

▷ Scomporre il polinomio $12x^3y^2 - 6y^2z^2 - 24x^4z$.

Il M.C.D. fra $12x^3y^2$; $-6y^2z^2$ e $-24x^4z$ è 6 e quindi può essere messo in evidenza. Bisogna quindi determinare il polinomio che deriva dalla divisione:

$$(12x^3y^2 - 6y^2z^2 - 24x^4z) : 6 = 2x^3y^2 - y^2z^2 - 4x^4z$$

quindi:

$$12x^3y^2 - 6y^2z^2 - 24x^4z = 6(2x^3y^2 - y^2z^2 - 4x^4z)$$

A differenza di tutti gli esempi precedenti però, non è corretto affermare che il polinomio di partenza è stato scomposto: infatti abbiamo scritto il polinomio $12x^3y^2 - 6y^2z^2 - 24x^4z$ di grado 5, come il prodotto fra il polinomio 6 di grado 0 (come tutti i numeri), e il polinomio $2x^3y^2 - y^2z^2 - 4x^4z$ di grado 5 come quello di partenza. Non abbiamo quindi scritto il polinomio come un prodotto di 2 polinomi di grado minore e quindi non l'abbiamo scomposto, ma abbiamo semplicemente messo in evidenza il numero 6.

□

1.15.2 Il raccoglimento parziale

Quando il M.C.D. fra i monomi di un polinomio è 1, significa che nessun fattore può essere messo in evidenza e che quindi non è possibile applicare il metodo del raccoglimento a fattor comune. In questi casi può "funzionare" il metodo del raccoglimento parziale che spieghiamo tramite un esempio:

Esempio

▷ Scomporre il polinomio: $2x^4 + 7x^3 + 4x + 14$

Si osserva subito che non esiste nessun fattore comune ai 4 monomi che costituiscono il polinomio e quindi il M.C.D. è 1 e non è possibile applicare il metodo del raccoglimento a fattor comune. Proviamo allora a considerare soltanto i primi 2 monomi che costituiscono il polinomio, cioè $2x^4$ e $7x^3$. Fra questi 2 monomi possiamo mettere in evidenza x^3 ottenendo:

$$2x^4 + 7x^3 = x^3(2x + 7)$$

Adesso facciamo altrettanto per gli altri 2 monomi: $4x$ e 14. Fra questi 2 monomi possiamo mettere in evidenza 2 ottenendo:

$$4x + 14 = 2(2x + 7)$$

è quindi corretto scrivere:

$$2x^4 + 7x^3 + 4x + 14 = x^3(2x + 7) + 2(2x + 7)$$

Ciò che abbiamo ottenuto non è certo una scomposizione in quanto abbiamo **una somma** fra i termini $x^3(2x+7)$ e $2(2x+7)$, mentre noi sappiamo che scomporre equivale a scrivere il polinomio di partenza in **un prodotto** di polinomi di grado minore. Osserviamo però che i 2 termini hanno un fattore in comune $2x + 7$ che può essere messo in evidenza ottenendo:

$$x^3(2x + 7) + 2(2x + 7) = (2x + 7)(x^3 + 2)$$

È immediato osservare che l'uguaglianza che abbiamo scritto è vera. Quindi la scomposizione, con il passaggio intermedio risulta:

$$2x^4 + 7x^3 + 4x + 14 = x^3(2x + 7) + 2(2x + 7) = (2x + 7)(x^3 + 2)$$

Abbiamo quindi scritto il polinomio $2x^4 + 7x^3 + 4x + 14$ di grado 4 come prodotto del polinomio $(2x+7)$ di grado 1 e del polinomio (x^3+2) di grado 3, e quindi l'abbiamo scomposto come richiesto.

□

Dopo questo esempio sono necessarie alcune osservazioni:

Osservazione sul numero dei monomi. Il raccoglimento parziale funziona utilizzando coppie di monomi: risulta quindi necessario (a meno di artifici particolari che non prenderemo in considerazione) che i monomi che formano il polinomio siano in numero pari.

□

Osservazione sulla scelta delle "coppie" di monomi. Una volta che il polinomio è ordinato con grado decrescente le coppie possono essere formate indifferentemente fra monomi adiacenti oppure alternati: ad esempio in un polinomio ordinato con grado decrescente formato da 4 monomi, le coppie possono essere formate dai primi 2 monomi una e dagli ultimi 2 l'altra, oppure, indifferentemente, il primo monomio in coppia col terzo e il secondo col quarto. È sbagliato formare una coppia col primo e il quarto monomio e l'altra col secondo e il terzo.

□

Osservazione. Notiamo che nell'ultimo esempio, dopo il primo passaggio, dentro le due parentesi figurava lo stesso binomio. Se così non fosse stato il tentativo di raccoglimento parziale sarebbe fallito e non avremmo potuto scomporre il polinomio.

□

Esempi

▷ Per avvalorare l'osservazione sulla scelta delle "coppie" di monomi consideriamo nuovamente il polinomio $2x^4 + 7x^3 + 4x + 14$ e proviamo a scomporlo tramite il raccoglimento parziale formando però una coppia con il primo e il terzo monomio e l'altra con il secondo e il quarto:

fra $2x^4$ e $4x$ possiamo mettere in evidenza $2x$ ottenendo:

$$2x^4 + 4x = 2x(x^3 + 2)$$

fra $7x^3$ e 14 possiamo mettere in evidenza 7 ottenendo:

$$7x^3 + 14 = 7(x^3 + 2)$$

Da cui:

$$2x^4 + 7x^3 + 4x + 14 = 2x(x^3 + 2) + 7(x^3 + 2) = (x^3 + 2)(2x + 7)$$

cioè lo stesso risultato ottenuto in precedenza.

▷ Scomporre il polinomio: $3x^3 - 5x^2 - 9x + 15$

Si osserva che il raccoglimento a fattor comune non è utilizzabile e si passa quindi al raccoglimento parziale. Scegliamo di considerare le coppie formate dai primi 2 monomi e dagli ultimi 2:

$$3x^3 - 5x^2 - 9x + 15 = x^2(3x - 5) - 3(3x - 5)$$

(si osservino con particolare attenzione i segni).

Risulta che dentro le parentesi compare lo stesso polinomio che può essere messo in evidenza ottenendo:

$$x^2(3x-5) - 3(3x-5) = (3x-5)(x^2-3)$$

che è la scomposizione cercata.

▷ Scomporre il polinomio: $6x^6 - 10x^4 + 3x^2 - 5$

Si osserva che il raccoglimento a fattor comune non è utilizzabile e si passa quindi al raccoglimento parziale. Scegliamo ancora di considerare le coppie formate dai primi 2 monomi e dagli ultimi 2, osservando però che fra gli ultimi 2 monomi non c'è alcun fattore comune:

$$6x^6 - 10x^4 + 3x^2 - 5 = 2x^4(3x^2-5) + 3x^2 - 5$$

Osserviamo che il polinomio dentro la parentesi è uguale al polinomio formato dagli ultimi 2 monomi. Possiamo allora ricorrere ad un espediente riscrivendo l'ultimo passaggio nel modo seguente:

$$2x^4(3x^2-5) + 3x^2 - 5 = 2x^4(3x^2-5) + 1(3x^2-5)$$

Adesso risulta che dentro le parentesi compare lo stesso polinomio che può essere messo in evidenza ottenendo:

$$2x^4(3x^2-5) + 1(3x^2-5) = (3x^2-5)(2x^4+1)$$

che è la scomposizione cercata.

Nel caso che si è verificato in questo esempio in cui in una coppia di monomi non ci siano fattori in comune, conviene scegliere diversamente le coppie (e quindi primo monomio col terzo e secondo col quarto). In questo modo otteniamo:

$$6x^6 - 10x^4 + 3x^2 - 5 = 3x^2(2x^4+1) - 5(2x^4+1)$$

da cui:

$$3x^2(2x^4+1) - 5(2x^4+1) = (2x^4+1)(3x^2-5)$$

che è lo stesso risultato di prima ottenuto però senza ricorrere a nessun espediente.

▷ Scomporre il polinomio $4x^8 - 6x^6 + 2x^5 - 3x^3 + 10x^2 - 15$.

Si osserva che il raccoglimento a fattor comune non è utilizzabile e si passa quindi al raccoglimento parziale. Scegliamo di considerare le coppie contigue (primo monomio col secondo, terzo col quarto, quinto col sesto).

$$4x^8 - 6x^6 + 2x^5 - 3x^3 + 10x^2 - 15 = 2x^6(2x^2-3) + x^3(2x^2-3) + 5(2x^2-3)$$

Abbiamo una somma di 3 addendi ciascuno contenente il polinomio $2x^2 - 3$ che può quindi essere messo in evidenza:

$$2x^6(2x^2-3) + x^3(2x^2-3) + 5(2x^2-3) = (2x^2-3)(2x^6+x^3+5)$$

che è la scomposizione cercata.

▷ Scomporre il polinomio $4(x-2)^5 + 7(x-2)^4 + 12(x-2) + 21$.

Osserviamo che nel polinomio, al posto di potenze di un'unica lettera, abbiamo potenze del binomio $(x-2)$. Un caso del genere si affronta "trattando" il binomio $(x-2)$ come se fosse un'unica lettera (sarebbe lunghissimo e fondamentalmente inutile calcolare le potenze del binomio). Possiamo quindi considerare $4(x-2)^5$ il primo termine del polinomio, $7(x-2)^4$ il secondo, $12(x-2)$ il terzo e 21 il quarto.

Pertanto, provando ad utilizzare la tecnica del raccoglimento parziale, mettendo in evidenza $(x-2)^4$ fra i primi 2 termini e 3 fra i secondi due si ottiene:

$$4(x-2)^5 + 7(x-2)^4 + 12(x-2) + 21 = (x-2)^4[4(x-2)+7] + 3[4(x-2)+7]$$

adesso possiamo mettere in evidenza $[4(x-2)+7]$:

$$(x-2)^4[4(x-2)+7] + 3[4(x-2)+7] = [4(x-2)+7][(x-2)^4+3]$$

che è la scomposizione cercata.

□

1.15.3 Il riconoscimento di prodotti notevoli

Il titolo ci riporta al paragrafo dei prodotti notevoli (vedi paragrafo 1.11). In esso abbiamo imparato delle regole che ci consentono di calcolare velocemente alcuni prodotti che ricorrono frequentemente (e per questo meritano l'appellativo di notevoli). I prodotti che abbiamo studiato sono il quadrato di un binomio, il prodotto di una somma per una differenza e la potenza qualsiasi di un binomio tramite il triangolo di Tartaglia.

In questo paragrafo ci proponiamo di fare un percorso inverso, partendo dal seguente:

Esempio

▷ Scomporre il polinomio $x^2 - 9$

È immediato constatare che le 2 tecniche studiate (raccoglimento a fattor comune e raccoglimento parziale) non sono applicabili in questo caso. Dallo studio dei prodotti notevoli sappiamo che:

$$(x-3)(x+3) = x^2 - 9$$

e, invertendo i termini di quest'uguaglianza si ottiene:

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

abbiamo cioè scritto il polinomio $x^2 - 9$ di grado 2 come il prodotto fra il polinomio $x - 3$ di grado 1 e il polinomio $x + 3$ di grado 1 e quindi l'abbiamo scomposto.

□

Vale quindi la seguente:

Regola per la scomposizione della differenza di 2 quadrati. Se un polinomio è formato da 2 soli termini che sono entrambi dei quadrati e che hanno segno opposto, allora il polinomio è scomponibile tramite il prodotto di una somma per una differenza.

Osservazione. La limitazione al fatto che il polinomio deve essere costituito da 2 soli termini non è strettamente necessaria, anche se noi <u>non</u> affronteremo casi in cui la differenza di 2 quadrati si trova in polinomi con più di 2 termini.

Esempi

▷ Scomporre il polinomio $-x^2 + 36$

Il polinomio è formato da 2 termini che sono entrambi dei quadrati (x^2 è il quadrato di x mentre 36 è il quadrato di 6) che hanno segno diverso. Dal momento che x^2 è preceduto dal segno meno e 36 dal segno più, nel prodotto della somma per una differenza 6 non deve cambiare di segno mentre x sí. Quindi:

$$-x^2 + 36 = (-x+6)(x+6)$$

▷ Scomporre il polinomio $a^2b^2 - 1$

Si tratta della differenza fra a^2b^2 (che è il quadrato di ab) e 1 (che è ovviamente il quadrato di 1). Quindi:

$$a^2b^2 - 1 = (ab - 1)(ab + 1)$$

▷ Scomporre il polinomio $x^2 + 25$

Il polinomio è composto da 2 quadrati che però hanno entrambi lo stesso segno. **In questi casi non è possibile scomporre il polinomio che è irriducibile.**

▷ Scomporre il polinomio $a^4 - 9$

Si tratta della differenza fra a^4 (che è il quadrato di a^2) e 9 (che è il quadrato di 3). Quindi:

$$a^4 - 9 = (a^2 - 3)(a^2 + 3)$$

□

Consideriamo adesso di dover scomporre il polinomio $x^2 - 10x + 25$. Notiamo che:

- è composto da 3 monomi
- 2 di questi monomi sono quadrati ed hanno entrambi segno positivo (x^2 è il quadrato di x e 25 è il quadrato di 5 o di -5).
- il terzo termine è il doppio prodotto fra x e -5

Da queste osservazioni possiamo affermare che $x^2 - 10x + 25$ è il quadrato del binomio $x - 5$ e pertanto possiamo scrivere:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

Si osservi che quanto appena scritto è la scomposizione richiesta: infatti il polinomio di partenza ha grado 2, mentre $(x - 5)^2$ non è altro che una forma abbreviata del prodotto $(x - 5)(x - 5)$ che è il prodotto di 2 polinomi di grado 1.

Questo esempio ci suggerisce la seguente:

Regola per riconoscere il quadrato di un binomio. Se un polinomio è:

- formato da 3 monomi
- 2 di questi monomi sono quadrati ed hanno segno positivo
- il terzo monomio equivale al doppio del prodotto fra le basi dei quadrati del precedente punto

allora il polinomio è il quadrato di un binomio.

□

Esempi

▷ Scomporre il polinomio $x^2 + 2xy + y^2$

Il polinomio è formato da 3 termini e contiene 2 quadrati entrambi di segno positivo: x^2 e y^2. Inoltre $2xy$ è uguale al doppio prodotto fra x e y. Quindi:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

▷ Scomporre il polinomio $x^2 + 9 + 6x$

Il polinomio è formato da 3 termini e contiene 2 quadrati entrambi di segno positivo: x^2 e 9. Inoltre $6x$ è uguale al doppio prodotto fra x e $+3$. Quindi:

$$x^2 + 9 + 6x = (x + 3)^2$$

▷ Scomporre il polinomio $x^2 + 10x + 16$

Il polinomio è formato da 3 termini e contiene 2 quadrati entrambi di segno positivo: x^2 e 16. Però $10x$ <u>non</u> è uguale al doppio prodotto fra x e 4, e quindi il polinomio non è il quadrato di nessun binomio.

▷ Scomporre il polinomio $x^2 - 8x - 16$

Il polinomio è formato da 3 termini e contiene 2 quadrati di cui però uno non ha segno positivo e quindi il polinomio non è il quadrato di nessun binomio.

□

Per completezza diamo la seguente:

Regola della somma di 2 cubi e della differenza di 2 cubi. Siano A e B 2 monomi, allora valgono le seguenti scomposizioni:

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

Si osservi che in entrambi i casi un polinomio di grado 3 è stato scritto come prodotto di un polinomio di grado 1 ed un polinomio di grado 2 e quindi è stato scomposto.

Esempi

▷ Scomporre il polinomio $x^3 - 27$

Si osserva che siamo di fronte alla differenza fra il cubo di x (che è x^3) e il cubo di 3 (27). Pertanto applicando la regola appena vista si ottiene:

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

▷ Scomporre il polinomio $x^3 + 8$

Si osserva che siamo di fronte alla somma del cubo di x (che è x^3) e il cubo di 2 (8). Pertanto applicando la regola appena vista si ottiene:

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

□

1.15.4 Il particolare trinomio di secondo grado

Questa tecnica di scomposizione può essere applicata nei polinomi di secondo grado in cui il coefficiente di x^2 (o qualsiasi altra lettera si usi) è 1. Bisogna trovare 2 numeri, chiamiamoli ad esempio p e q, tali che la loro somma sia il coefficiente di x e il loro prodotto sia il termine noto. **Una volta trovati p e q possiamo affermare che il polinomio di secondo grado di partenza è uguale al prodotto** $(x + p)(x + q)$ cioè è uguale ad un prodotto di polinomi di grado minore che rappresenta la sua scomposizione. Chiariamo con alcuni esempi.

Esempi

▷ Scomporre il polinomio $x^2 + 6x + 8$

Osserviamo che i monomi del polinomio non hanno alcun fattore in comune (e quindi non possiamo utilizzare la tecnica del raccoglimento a fattor comune), sono in numero dispari (e quindi non possiamo utilizzare la tecnica del raccoglimento parziale). Inoltre essendo composto da 3 monomi non può essere una differenza di 2 quadrati. Potrebbe essere il quadrato di un binomio ma il numero 8 non è quadrato di nessun numero naturale e quindi il polinomio in questione non è scomponibile tramite i prodotti notevoli.

Essendo un polinomio di secondo grado con coefficiente di x^2 uguale a 1, possiamo provare con il particolare trinomio di secondo grado: bisogna trovare quindi 2 numeri, p e q tali che:

$$p + q = +6 \qquad p \cdot q = +8$$

tali numeri sono $p = +4$ e $q = +2$ (o viceversa tanto non cambia niente). La scomposizione cercata è quindi:

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 4)(x + 2)$$

Se vogliamo verificare che la scomposizione è esatta dobbiamo effettuare il prodotto:

$$(x + 4)(x + 2) = x^2 + 2x + 4x + 8 = x^2 + 6x + 8$$

che conferma la correttezza della scomposizione.

□

Osservazione. Per determinare p e q bisogna affidarsi all'esercizio e alla nostra intuizione. Ci sono però alcuni elementi che possono facilitare la ricerca: se il prodotto fra p e q è negativo significa che p e q hanno segno diverso (perché se avessero lo stesso segno il loro prodotto sarebbe positivo). Invece se il prodotto fra p e q è positivo significa che p e q hanno lo stesso segno (quindi o sono entrambi negativi o sono entrambi positivi). A questo punto guardiamo la somma: se è positiva significa che sono entrambi positivi, se è negativa significa che sono entrambi negativi. Riassiumiamo quanto detto col seguente schema:

- $p \cdot q$ è negativo $\Rightarrow$ p e q hanno segno opposto
- $p \cdot q$ è positivo $\Rightarrow$ p e q hanno lo stesso segno
  - se $p + q$ è positiva p e q sono entrambi positivi
  - se $p + q$ è negativa p e q sono entrambi negativi

□

Esempi

▷ Scomporre il polinomio $x^2 + 4x - 5$

Tramite le stesse considerazioni del primo esempio possiamo escludere le 3 tecniche di scomposizione finora affrontate (raccoglimento a fattor comune; raccoglimento parziale; tramite riconoscimento di prodotti notevoli).

Essendo un polinomio di secondo grado con coefficiente di x^2 uguale a 1, possiamo provare con il particolare trinomio di secondo grado: bisogna trovare quindi 2 numeri, p e q tali che:

$$p + q = +4 \qquad p \cdot q = -5$$

Dal momento che il prodotto è negativo p e q hanno segno diverso. Infatti risulta che $p = +5$ e $q = -1$ (o viceversa tanto non cambia niente). La scomposizione cercata è quindi:

$$x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$$

▷ Scomporre il polinomio $a^2 - 7a + 12$

Tramite le stesse considerazioni del primo esempio possiamo escludere le 3 tecniche di scomposizione finora affrontate (raccoglimento a fattor comune; raccoglimento parziale; tramite riconoscimento di prodotti notevoli).

Essendo un polinomio di secondo grado con coefficiente di a^2 uguale a 1, possiamo provare con il particolare trinomio di secondo grado: bisogna trovare quindi 2 numeri, p e q tali che:

$$p + q = -7 \qquad p \cdot q = +12$$

Dal momento che il prodotto è positivo p e q hanno lo stesso segno. Inoltre $p + q$ è negativa quindi p e q sono entrambi negativi. Infatti risulta che $p = -3$ e $q = -4$ (o viceversa tanto non cambia niente). La scomposizione cercata è quindi:

$$a^2 - 7a + 12 = (a - 3)(a - 4)$$

▷ Scomporre il polinomio $x^2 + 2x + 3$

Tramite le stesse considerazioni del primo esempio possiamo escludere le 3 tecniche di scomposizione finora affrontate (raccoglimento a fattor comune; raccoglimento parziale; tramite riconoscimento di prodotti notevoli).

Essendo un polinomio di secondo grado con coefficiente di x^2 uguale a 1, possiamo provare con il particolare trinomio di secondo grado: bisogna trovare quindi 2 numeri, p e q tali che:

$$p + q = +2 \qquad p \cdot q = +3$$

Dal momento che il prodotto è positivo p e q hanno lo stesso segno e, dato che $p + q$ è positiva p e q devono essere entrambi positivi. Però non esistono due numeri il cui prodotto è +3 e la cui somma è +2, quindi questo polinomio non è scomponibile.

□

1.15.5 La scomposizione tramite il metodo di Ruffini

Questo metodo di scomposizione ha il pregio di essere più generale degli altri, cioè può funzionare nei casi in cui le altre tecniche falliscono. D'altra parte però questa tecnica è sicuramente più lunga e laboriosa delle altre e per questo va tenuta come ultima possibilità. Cominciamo con un esempio:

Esempio

▷ Effettuare la seguente divisione col metodo di Ruffini: $(2x^3 - 7x + 5) : (x - 1)$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & 0 & -7 & +5 \\
 & & & & \\
1 & & +2 & +2 & -5 \\
\hline
 & 2 & +2 & -5 & 0
\end{array}$$

Quindi il quoziente della divisione è $2x^2 + 2x - 5$ con resto 0. Se volessimo effettuare la riprova otterremmo che:

$$(2x^2 + 2x - 5)(x - 1) = 2x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 2x - 5x + 5 = 2x^3 - 7x + 5$$

da cui, leggendo da destra a sinistra:

$$2x^3 - 7x + 5 = (2x^2 + 2x - 5)(x - 1)$$

Abbiamo scritto il polinomio $2x^3 - 7x + 5$ come il prodotto di 2 polinomi di grado minore quindi, apparentemente senza volerlo, l'abbiamo scomposto. Osserviamo che ciò è stato possibile perché il resto della divisione è zero. Il problema è che se la richiesta fosse stata: scomporre il polinomio $2x^3 - 7x + 5$, come potevamo prevedere che la divisione per $x - 1$ avrebbe avuto resto 0? E di conseguenza che il prodotto fra il quoziente e $x - 1$ sarebbe stata la scomposizione di $2x^3 - 7x + 5$?

A rispondere a queste domande è il teorema del resto. Prima di introdurlo abbiamo bisogno di definire la seguente notazione: un polinomio nella variabile x può essere chiamato $P(x)$ (si legge "pi di x"). Quindi ad esempio possiamo definire:

$$P(x) = 2x^3 - 7x + 5$$

A questo punto, ad esempio con $P(2)$, intendiamo il valore che assume il polinomio se al posto della x mettiamo il numero 2:

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 + 5 = 16 - 14 + 5 = 7$$

quindi $P(2) = 7$.

Allo scopo di chiarire meglio quanto appena detto svolgiamo il seguente:

Esercizio

Dato il polinomio $P(x) = 3x^4 - x^2 - 2x + 6$ determinare $P(1)$; $P(-2)$ e $P(0)$.

$$P(1) = 3 \cdot 1^4 - 1^2 - 2 \cdot 1 + 6 = 3 - 1 - 2 + 6 = 6$$

$$P(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 6 = 3 \cdot 16 - 4 + 4 + 6 = 22$$

Si osservi che quando il valore da sostituire è negativo occorre usare le parentesi.

$$P(0) = 3 \cdot 0^4 - 0^2 - 2 \cdot 0 + 6 = 6$$

□

Possiamo ora introdurre il teorema del resto:

Teorema del resto. Sia a un qualunque numero. Il resto della divisione fra un polinomio $P(x)$ e il binomio $x - a$ è $P(a)$.

Dimostrazione: Chiamiamo Q il quoziente della divisione fra $P(x)$ e $x - a$ e R il resto. Sappiamo che:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q + R$$

Se vogliamo calcolare $P(a)$ basta sostituire nell'espressione precedente alla x la a:

$$P(a) = (a - a) \cdot Q + R$$

ma ovviamente $a - a = 0$ quindi

$$P(a) = 0 \cdot Q + R = R$$

che dimostra che il resto della divisione è $P(a)$ come affermato dal teorema.

□

Esempio

▷ Determinare il resto della divisione $(x^2 - 4x + 9) : (x - 2)$

In questo caso $a = 2$ quindi, grazie al teorema, per calcolare il resto della divisione basta determinare $P(2)$:

$$P(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 9 = +5$$

Verifichiamo che il resto è davvero $+5$ eseguendo la divisione col metodo di Ruffini:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -4 & +9 \\ & & & \\ 2 & & +2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & +5 \end{array}$$

Che conferma che il resto è $+5$

▷ Determinare il resto della divisione $(3x^3 - 4x^2 + 3) : (x + 1)$

In questo caso $a = -1$ quindi, grazie al teorema, per calcolare il resto della divisione basta determinare $P(-1)$:

$$P(-1) = 3 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 3 = -4$$

Verifichiamo che il resto è davvero -4 eseguendo la divisione col metodo di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -4 & 0 & +3 \\ & & & & \\ -1 & & -3 & +7 & -7 \\ \hline & +3 & -7 & +7 & -4 \end{array}$$

Che conferma che il resto è -4

□

Una conseguenza diretta del teorema del resto è il teorema di Ruffini:

Teorema di Ruffini. Un polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio del tipo $x - a$ se e solo se $P(a) = 0$

□

Riassumendo: per scomporre col metodo di Ruffini un polinomio $P(x)$ bisogna trovare un valore a tale che $P(a) = 0$. Una volta trovato sappiamo che il polinomio $P(x)$ è divisibile per $x - a$ (cioè la divisione ha resto 0). Si esegue la divisione e si trova il quoziente Q. A quel punto la scomposizione cercata è $P(x) = Q \cdot (x - a)$.

Il problema è determinare il valore a tale che $P(a) = 0$. Ci viene in aiuto il seguente teorema:

Teorema. Dato un polinomio $P(x)$ quel numero a tale che $P(a) = 0$ va ricercato, se esiste, fra i divisori del termine noto.

□

Possiamo quindi adesso dare il:

Metodo per la scomposizione col metodo di Ruffini.

1. Si scrivono tutti i divisori, positivi e negativi, del termine noto.
2. Si calcola $P(a)$ con a uguale ai divisori scritti al punto precedente.
3. Se non si verifica mai che $P(a) = 0$ il polinomio non è scomponibile con Ruffini, altrimenti si esegue la divisione fra il polinomio e $x - a$, ottenendo il quoziente Q
4. La scomposizione cercata è $Q \cdot (x - a)$

Esempio

▷ Scomporre il polinomio $x^3 - 5x + 2$

Osserviamo che i monomi del polinomio non hanno alcun fattore in comune (e quindi non possiamo utilizzare la tecnica del raccoglimento a fattor comune), sono in numero dispari (e quindi non possiamo utilizzare la tecnica del raccoglimento parziale). Inoltre essendo composto da 3 monomi non può essere una differenza di 2 quadrati. Potrebbe essere il quadrato di un binomio ma il numero 2 non è quadrato di nessun numero naturale e quindi il polinomio in questione non è scomponibile tramite i prodotti notevoli. Inoltre, essendo di terzo grado, non è ovviamente un particolare trinomio di secondo grado.

Non rimane che provare col metodo di Ruffini. Quindi:

1. Si scrivono tutti i divisori, positivi e negativi, del termine noto che in questo caso è 2. Quindi i divisori sono: $+1$; -1; $+2$ e -2
2. Si calcola
$$P(1) = 1^3 - 5 \cdot 1 + 2 = -2$$
Non è zero e quindi continuiamo:
$$P(-1) = (-1)^3 - 5 \cdot (-1) + 2 = +6$$
Non è zero e quindi continuiamo:
$$P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2 + 2 = 0$$
abbiamo trovato quindi il valore che rende zero il polinomio cioè $+2$.
3. si esegue la divisione fra il polinomio $x^3 - 5x + 2$ e $x - 2$:
$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -5 & +2 \\ & & & & \\ +2 & & +2 & +4 & -2 \\ \hline & 1 & +2 & -1 & 0 \end{array}$$
ottenendo il quoziente $Q = x^2 + 2x - 1$
4. La scomposizione cercata è quindi $x^3 - 5x + 2 = (x^2 + 2x - 1)(x - 2)$

▷ Scomporre il polinomio $x^4 + 6x^3 + 5$

Per i motivi visti nell'esempio precedente le prime 4 tecniche falliscono. Proviamo quindi col metodo di Ruffini:

1. Si scrivono tutti i divisori, positivi e negativi, del termine noto che in questo caso è $+5$. Quindi i divisori sono: $+1$; -1; $+5$ e -5

2. Si calcola

$$P(1) = 1^4 + 6 \cdot 1^3 + 5 = +12$$

Non è zero e quindi continuiamo:

$$P(-1) = (-1)^4 + 6 \cdot (-1) + 5 = +1 - 6 + 5 = 0$$

abbiamo trovato quindi il valore che rende zero il polinomio cioè -1.

3. si esegue la divisione fra il polinomio $x^4 + 6x^3 + 5$ e $x + 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & +6 & 0 & 0 & +5 \\ & & & & & \\ -1 & & -1 & -5 & +5 & -5 \\ \hline & 1 & +5 & -5 & +5 & 0 \end{array}$$

ottenendo il quoziente $Q = x^3 + 5x^2 - 5x + 5$

4. La scomposizione cercata è quindi $x^4 + 6x^3 + 5 = (x^3 + 5x^2 - 5x + 5)(x + 1)$

▷ Scomporre il polinomio $x^4 - 2x + 2$

Per i motivi visti nell'esempio precedente le prime 4 tecniche falliscono. Proviamo quindi col metodo di Ruffini:

1. Si scrivono tutti i divisori, positivi e negativi, del termine noto che in questo caso è $+2$. Quindi i divisori sono: $+1$; -1; $+2$ e -2

2. Si calcola

$$P(1) = 1^4 - 2 \cdot 1 + 2 = +3$$

Non è zero e quindi continuiamo:

$$P(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1) + 2 = +1 + 2 + 2 = +5$$

Non è zero e quindi continuiamo:

$$P(2) = 2^4 - 2 \cdot 2 + 2 = +14$$

Non è zero e quindi continuiamo:

$$P(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2) + 2 = +16 + 4 + 2 = 22$$

Nessun divisore del termine noto sostituito alla x annulla il polinomio. Quindi il polinomio non è scomponibile tramite il metodo di Ruffini e quindi è per noi irriducibile.

□

Osservazione. Non riuscire a scomporre un polinomio con nessuna delle 5 tecniche non significa automaticamente che sia irriducibile nel senso stretto del termine: questo perché alcuni polinomi sono scomponibili tramite artifici che esulano dagli obiettivi del nostro corso. Per i nostri scopi comunque, ogni volta che un polinomio non è scomponibile con le 5 tecniche così come sono state presentate, diremo che il polinomio è irriducibile.

□

1.15.6 Scomposizioni "multiple"

Come abbiamo più volte sottolineato, scomporre un polinomio significa scriverlo come un prodotto di polinomi di grado minore. Può benissimo accadere però, che uno dei due polinomi di grado minore, o entrambi, siano ancora scomponibili. In tal caso, per concludere la scomposizione, è necessario scomporre anche questi polinomi. Così come avviene nelle scomposizioni numeriche, se ad esempio vogliamo scomporre 42 e scriviamo:

$$42 = 6 \cdot 7$$

ci accorgiamo che uno dei due fattori (6), può essere a sua volta scomposto in $6 = 2 \cdot 3$. Quindi, sostituendo nella scomposizione iniziale si ottiene:

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

e, essendo i 3 fattori (2; 3 e 7) non scomponibili (cioè primi), la scomposizione è completata.

È immediato osservare che nel caso dei numeri è tutto più semplice: nel caso dei polinomi è molto più laborioso capire quando un polinomio è o non è scomponibile. Per facilitare il compito allo studente, quando in un esercizio verrà scritto "scomporre fino a quando è possibile" si intenderà che dopo una prima scomposizione è necessario controllare che i polinomi trovati siano a loro volta scomponibili e, in caso affermativo, scomporli. Mentre con la consueta scritta: "scomporre il seguente polinomio", lo studente si fermerà dopo la prima scomposizione.

Esempi

▷ Scomporre fino a quando é possibile il seguente polinomio: $x^3 + 4x^2 - 9x - 36$

Non esiste alcun fattor comune, proviamo allora il raccoglimento parziale considerando le coppie formate dai primi 2 termini e dai secondi 2:

$$x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = x^2(x + 4) - 9(x + 4)$$

Possiamo mettere in evidenza $x + 4$:

$$= x^2(x + 4) - 9(x + 4) = (x + 4)(x^2 - 9)$$

Quindi la scomposizione finale è:

$$x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = (x + 4)(x^2 - 9)$$

Dobbiamo chiederci se $x + 4$, o $x^2 - 9$, o entrambi sono ancora scomponibili: $x + 4$ ovviamente no essendo di primo grado, resta da vedere $x^2 - 9$.

Non si può applicare né il fattor comune, né il raccoglimento parziale. Proviamo con i prodotti notevoli e ci accorgiamo che è una differenza di 2 quadrati, scomponibile come:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

Pertanto, per concludere la scomposizione iniziale, al posto di x^2-9 dobbiamo scrivere $(x-3)(x+3)$. Quindi:

$$x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = (x + 4)(x + 3)(x - 3)$$

▷ Scomporre fino a quando é possibile il seguente polinomio: $x^4 - 4x^3 + 4x^2$

Possiamo applicare il raccoglimento a fattor comune in quanto tutti i termini hanno x^2 come fattore comune:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 - 4x + 4)$$

Dobbiamo chiederci se $x^2 - 4x + 4$ è ancora scomponibile.

Non si può applicare né il fattor comune, né il raccoglimento parziale. Proviamo con i prodotti notevoli e ci accorgiamo che è il quadrato di un binomio:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

Pertanto, per concludere la scomposizione iniziale, al posto di x^2-4x+4 dobbiamo scrivere $(x-2)^2$. Quindi:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x - 2)^2$$

▷ Scomporre fino a quando é possibile il seguente polinomio: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Non funziona il raccoglimento a fattor comune, il raccoglimento parziale (che comunque va provato essendo 4 termini), non è un prodotto notevole e non è un particolare trinomio di secondo grado. Proviamo col metodo di Ruffini:

I divisori del termine noto sono 1; -1; 2; -2; 3; -3; 6 e -6:

$$P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 = -8$$

Non è zero quindi continuiamo:

$$P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$$

abbiamo trovato quindi il valore che rende zero il polinomio cioè -1.

Eseguiamo quindi la divisione fra il polinomio $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ e $x + 1$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & +2 & -5 & -6 \\ & & & & \\ -1 & & -1 & -1 & +6 \\ \hline & 1 & +1 & -6 & 0 \end{array}$$

ottenendo il quoziente $Q = x^2 + x - 6$.

La scomposizione cercata è quindi $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x^2 + x - 6)(x + 1)$.

Dobbiamo chiederci se x^2+x-6 è ancora scomponibile: osserviamo che i monomi del polinomio non hanno alcun fattore in comune (e quindi non possiamo utilizzare la tecnica del raccoglimento a fattor comune), sono in numero dispari (e quindi non possiamo utilizzare la tecnica del raccoglimento parziale). Inoltre essendo composto da 3 monomi non può essere una differenza di 2 quadrati. Potrebbe essere il quadrato di un binomio ma il numero -6 non è quadrato di nessun numero naturale e quindi il polinomio in questione non è scomponibile tramite i prodotti notevoli.

Essendo un polinomio di secondo grado con coefficiente di x^2 uguale a 1, possiamo provare con il particolare trinomio di secondo grado: bisogna trovare quindi 2 numeri, p e q tali che:

$$p + q = +1 \qquad p \cdot q = -6$$

tali numeri sono $p = +3$ e $q = -2$ (o viceversa tanto non cambia niente). La scomposizione cercata è quindi:

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

Quindi, sostituendo nella scomposizione iniziale, si ottiene:

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 3)(x - 2)(x + 1)$$

che è la scomposizione completa.

□

1.16 Modelli matematici

Nel primo paragrafo abbiamo fatto l'esempio delle portate d'acqua dei 3 affluenti fiorentini dell'Arno: in quell'esempio abbiamo creato un modello matematico.

Un modello matematico è una rappresentazione matematica (spesso, anche se non sempre, in forma semplificata) di una situazione reale. I modelli matematici sono in qualunque ambito scientifico e sono più complessi tanto più è articolata la situazione che devono rappresentare.

Torniamo all'esempio degli affluenti del paragrafo 1.1, e supponiamo che dobbiamo calcolare la portata d'acqua giornaliera che essi immettono nell'Arno. Abbiamo determinato che tale portata è:

$$\text{portata totale} = \text{portata Terzolle} + \text{portata Mugnone} + \text{portata Africo} = p + 2 \cdot p + \frac{p}{2}$$

Adesso però, a differenza di prima, sappiamo "semplificare" l'espressione $p + 2 \cdot p + \frac{p}{2}$ grazie agli strumenti imparati in questo capitolo:

$$p + 2 \cdot p + \frac{p}{2} = \frac{7}{2}p$$

quindi se ad esempio la portata d'acqua odierna del Terzolle risulta $p = 1350\ m^3$ (metri cubi) di acqua, per determinare la portata totale è sufficiente calcolare $\frac{7}{2} \cdot 1350 = 4725m^3$ di acqua. Se non avessimo saputo semplificare la precedente espressione avremmo dovuto sostituire 1350 ogni volta che compare p:

$$1350 + 2 \cdot 1350 + \frac{1350}{2} = 1350 + 2700 + 675 = 4725$$

che porta ovviamente allo stesso risultato ma con un procedimento più lungo.

Consideriamo adesso il seguente:

Esempio

▷ Un animatore, durante i soggiorni estivi con i ragazzi, allo scopo di coinvolgerli nelle attività dà e toglie dei piccoli trofei (chiamamoli medaglie) secondo questo criterio:

1. il primo giorno dà 2 medaglie a tutti
2. il secondo giorno forma per un gioco delle coppie maschio-femmina. A chi rimane fuori regala 3 medaglie
3. il terzo giorno regala 3 medaglie alla metà dei ragazzi (maschi e femmine)
4. il quarto giorno toglie 5 medaglie a ciascun maschio
5. il quinto giorno regala una medaglia alla metà delle femmine
6. il sesto giorno regala una medaglia alla metà dei maschi

Quante medaglie si deve portare l'animatore?

La risposta dipende ovviamente da quanti iscritti ci sono a quel soggiorno estivo, o meglio quanti iscritti maschi e quanti iscritti femmine visto che l'animatore talvolta differenzia a seconda del sesso. Quindi, per poter rispondere, manca il numero dei maschi e il numero delle femmine. Proviamo comunque a creare un modello matematico chiamando con la lettera a il numero dei maschi e con la lettera b il numero delle femmine:

1. il primo giorno dà 2 medaglie a tutti: essendo a i maschi e b le femmine il totale è $(a+b)$ e quindi le medaglie date sono $2(a+b)$
2. il secondo giorno forma per un gioco delle coppie maschio-femmina. A chi rimane fuori regala 3 medaglie: supponendo che i maschi sono più delle femmine rimangono fuori $a-b$ maschi e quindi le medaglie date sono $3(a-b)$
3. il terzo giorno regala 3 medaglie alla metà dei ragazzi (maschi e femmine): la metà di tutti è $\frac{a+b}{2}$ e quindi le medaglie date sono $3\frac{a+b}{2}$
4. il quarto giorno toglie 5 medaglie a ciascun maschio: quindi toglie $5a$ medaglie
5. il quinto giorno regala una medaglia alla metà delle femmine: metà delle femmine è $\frac{b}{2}$ e quindi le medaglie date sono $\frac{b}{2}\cdot 1$ e quindi $\frac{b}{2}$
6. il sesto giorno regala una medaglia alla metà dei maschi: metà dei maschi è $\frac{a}{2}$ e quindi le medaglie date sono $\frac{a}{2}\cdot 1$ e quindi $\frac{a}{2}$

Quindi otteniamo l'espressione:

$$+\underbrace{2(a+b)}_{\text{primo giorno}}+\underbrace{3(a-b)}_{\text{secondo giorno}}+\underbrace{3\frac{a+b}{2}}_{\text{terzo giorno}}-\underbrace{5a}_{\text{quarto giorno}}+\underbrace{\frac{b}{2}}_{\text{quinto giorno}}+\underbrace{\frac{a}{2}}_{\text{sesto giorno}}$$

Supponiamo adesso che ci venga fornito il dato il numero degli iscritti: 12 maschi e 10 femmine (e quindi $a=12$ e $b=10$). È quindi possibile rispondere alla domanda iniziale: quante medaglie l'animatore deve avere? Se non sapessimo semplificare la precedente espressione dovremmo sostituire 12 ogni volta che compare a e 10 ogni volta che compare b e fare tutti i calcoli. Un lavoro molto lungo soprattutto se va ripetuto per tutti i soggiorni estivi con un numero degli iscritti diverso. Molto meglio è "semplificare" l'espressione:

$$+2(a+b)+3(a-b)+3\frac{a+b}{2}-5a+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}=\cancel{2a}+2b+\cancel{3a}-3b+\frac{3a+3b}{2}-\cancel{5a}+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}=$$

$$=\frac{+4b-6b+3a+3b+b+a}{2}=\frac{4a+2b}{2}=\frac{\cancel{2}\,(2a+b)}{\cancel{2}}=2a+b$$

Quindi, nel caso in cui $a=12$ e $b=10$ le medaglie da portare sono $2\cdot 12+10=34$.

□

1.17 Esercizi

Paragrafo 1.1

1. Determina il valore dell'espressione: $a+3\cdot b$ per
   - $a=2$ e $b=1$
   - $a=0$ e $b=-1$
   - $a=-2$ e $b=-2$
2. Determina il valore dell'espressione: $2a^2-3\cdot b$ per
   - $a=2$ e $b=1$
   - $a=0$ e $b=-1$

- $a = -2$ e $b = -2$

3. Determina il valore dell'espressione: $v \cdot t$ per
   - $v = 10$ e $t = 1$
   - $v = 19,8$ e $t = 5$
   - $v = 8$ e $t = 2,5$

4. Determina il valore dell'espressione: $\frac{1}{2}a \cdot t^2$ per
   - $a = 10$ e $t = 1$
   - $a = 9,8$ e $t = 5$
   - $a = 5$ e $t = 2,5$

5. Determina il valore dell'espressione: $m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}m \cdot v^2$ per $m = 5$, $g = 10$, $h = 15$ e $v = 2$

   Paragrafo 1.2

6. Riduci in forma normale i seguenti monomi:
   $2a^3b3b^4c$; $-3b^2a^2b^34a^2$; $b^2b^2b^34$; $-3b^2a^2$

7. Determina il grado dei seguenti monomi:
   $2a^3b^4c$; $-3a^2b^3$; -3; 5^2b^4; a

   Paragrafo 1.3

   Esegui <u>quando possibile</u> le seguenti somme algebriche:

8. $2a^3b + 3a^2b$; $-3a^2b^3 + 5a^2b^3$; $5 + 2a$
9. $\frac{1}{4}a^7 + 4a^7$; $-2 + 4$; $a + 2a$
10. $2a^3b - 3a^2b$; $3a^2b^3 - 5a^2b^3$; $2a - 2a$
11. $-3a^2c + 3ac^2$; $-2b - 4b$; $a - 6a$

    Risolvi le seguenti espressioni:

12. $5a + 3a + 2b + 4a - b$ $[12a + b]$
13. $5^2a + 3^2a + 2^2b + 4^2a - b$ $[50a + 3b]$
14. $\frac{2}{3}a^2 + \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3a^2 - 3a$ $[-a^2]$
15. $\frac{1}{2}a^3 + \frac{4}{3}a^3 + 3a^3 - 3a - \frac{29}{6}a^3 + \frac{5}{2}a$ $[-\frac{1}{2}a]$
16. $3ab + 15a - 5b - 7a - 4a - 2b - 5ab - 4a$ $[-7b - 2ab]$
17. $2x - x^2 - 5x + 3y + 2x^2 + 3x - 4y$ $[x^2 - y]$
18. $\frac{4}{3}x^3 - 8x^2 - 16x - 4x + x^3 - 12 + 2x^2 + 6x^2 + 20x + 12x$ $[\frac{7}{3}x^3 + 12x - 12]$
19. $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - x^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^2$ $[\frac{25}{12}x - \frac{25}{12}x^2]$
20. $\frac{2}{5}a - \frac{3}{2}a - \frac{1}{6}b + \frac{3}{5}a + \frac{1}{3}b$ $[-\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}b]$
21. $\frac{2}{5}a^2b - \frac{3}{2}a^2b - \frac{1}{6}a^3 + \frac{7}{5}a^2b + \frac{2}{3}a^3$ $[\frac{3}{10}a^2b + \frac{1}{2}a^3]$

    Paragrafo 1.4

    Esegui le seguenti moltiplicazioni fra monomi

22. $3a \cdot 2ab$; $\quad -\frac{1}{3}ab^2c \cdot 2ab$; $\quad 5 \cdot (-2)ab$; $\quad -\frac{6}{7}ab^2c \cdot \frac{14}{3}a^5$

Sostituisci ai puntini il monomio che rende esatta la moltiplicazione:

23. $3a \cdot (\ldots) = 6a^3c$; $\quad (\ldots) \cdot (-2a^2b^2) = +10a^3b^2c$

24. $(\ldots) \cdot (-2ab^2) = -2ab^2c$; $\quad (-3b^2) \cdot (\ldots) = +9b^2c^4$

25. $(\ldots) \cdot (-\frac{1}{3}a^4) = -\frac{1}{6}a^4b^2$; $\quad (-abc^2) \cdot (\ldots) = +12ab^2c^4$

Risolvi le seguenti espressioni:

26. $2a^2b^2(3a^2b^2) - (-ab)(5a^3b^3) - (-4a^2b^2)2a^2b^2 - 7a^4b^4 \qquad [12a^4b^4]$

27. $a + 2a^4b^3 + 21 - a^2b^2 \cdot 3a^2b + 4a - ab^3 \cdot 2a^3 - 5a^4b^3 - 6 \cdot 3 - 3 \qquad [-8a^4b^3 + 5a]$

Paragrafo 1.5

Determina le seguenti potenze dei monomi

28. $(2ab^5)^3$; $\quad (-\frac{2}{3}a^3bc^4)^2$; $\quad (-\frac{1}{2}abc^4)^3$; $\quad (-10c^4)^2$

Sostituisci ai puntini il monomio che rende esatto l'elevamento a potenza:

29. $(\ldots)^2 = 4a^4b^6$; $\quad (\ldots)^3 = -27b^6$; $\quad (\ldots)^2 = \frac{1}{4}a^8$; $\quad (\ldots)^9 = a^9b^{18}$

Risolvi le seguenti espressioni:

30. $(-\frac{1}{2}b^6x^3)^2 + (\frac{5}{4}b^2)(-\frac{1}{2}b^4x)^2(-2b^2x^4) - (-\frac{3}{2}b^4x^2)^3 \qquad [3b^{12}x^6]$

31. $-a^2b^4 - (\frac{1}{2}ab^2)^2 + (\frac{3}{2}b^2)(2ab)^2 - 10 \cdot \frac{3}{20}b^4 \cdot (\frac{1}{2}a)^2 \qquad [\frac{35}{8}a^2b^4]$

Paragrafo 1.6

Esegui, quando possibile, le seguenti divisioni fra monomi:

32. $8x^4 : (4x^3)$; $\quad -5ab^2 : (-2ab^2)$; $\quad \frac{2}{9}a^9b^2 : (-\frac{2}{3}b)$

33. $8x^4y^2 : (2x^3z)$; $\quad \frac{1}{8}a^5b^2c : (-\frac{3}{4}a^2b^2)$; $\quad \frac{2}{3}ab^2 : (-\frac{3}{2}ab)$

Paragrafo 1.7

Determinare M.C.D. e m.c.m dei seguenti gruppi di monomi:

34. $4a^2bc^3$; $\quad 6b^2c^2$; $\quad 8a^9c^4$

35. $\frac{1}{2}a^2c^3$; $\quad 6b^2c^2$; $\quad 2a^7b^4$

36. $10a^2bc^3$; $\quad 5a^2b^2c^2$; $\quad 8abc^4d$

37. $3a^2$; $\quad 6a^2$; $\quad 8a^4$

38. $a^2b^3c^3$; $\quad b^2c^2$; $\quad 8b^6c^4$

39. $3a^2b^4d^6$; $\quad 2b^3cd^6$; $\quad 6ab^2d^6$

Paragrafo 1.9

Risolvi le seguenti espressioni:

40. $2a - (a^2 + 5a - 3y) + (2a^2 + 3a - 4y) \qquad [a^2 - y]$

41. $(a + b + 3c) - (2a - 3b - c) - (-5b + a) - 4c \qquad [-2a + 9b]$

42. $(5x - xy) + (-xy + y + x) + (3xy - 2x - 7y) - (4x - xy) \qquad [+2xy - 6y]$

43. $(a^2 - 6a - 12) + (a + 3) - (-4 + \frac{2}{3}a^2) - \frac{3}{2}a + (-4a - 40) + 4a \qquad [\frac{1}{3}a^2 - \frac{13}{2}a - 45]$

44. $4a-(a+2)+(a-1)-(-4a^2-2a+1)+(1-3a-4a^2)$ $[+3a-3]$

Paragrafo 1.10

Effettua le seguenti moltiplicazioni fra polinomi:

45. $\frac{4}{3}a(a^2-6a-12)$; $-\frac{3}{2}a(-4a-\frac{40}{3})$; $(a^2-3a^4b^2+6c^2)\frac{1}{3}abc$

46. $(a-2b)(3ab-2)$; $(\frac{1}{3}x+2xy^2)(6y+9x)$; $(2a+b-c)(2a-b+c)$

Risolvi le seguenti espressioni:

47. $(4a^2+8a)(a-1)-(a^2-2a+1)+a(1-3a-4a^2)$ $[-5a-1]$

48. $(a+b-2)(a-b)-2a(a-1)+(a^2b+4ab)(b-2)-ab^2(a+4)+2b(-1+4a)$ $[-a^2-b^2-2a^2b]$

49. $(a+\frac{2}{3}b)(3a-\frac{1}{2}b)-\frac{2}{3}a(a+3)+(2-ab^2)(a+4)+\frac{1}{3}a(-7a-\frac{9}{2}b+12b^2)$ $[-a^2b^2-\frac{1}{3}b^2+8]$

50. $2-[(a+2)(a+3)-a(a+5)-4]$ $[0]$

51. $4a(a+2)(a-1)+(-a^2+2a-1)-a(-1+3a+4a^2)$ $[-5a-1]$

Paragrafo 1.11

Risolvi tramite i prodotti notevoli:

52. $(a-3)(a+3)$; $(-a+2)^2$; $(\frac{2}{3}a+2)^2$; $(-a+2)(-a-2)$

53. $(a-\frac{3}{5})(-a-\frac{3}{5})$; $(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}a)^2$; $(-3a-3)^2$; $(a+1)^4$

54. $(2a-1)^3$; $(a+b+2)(a+b-2)$; $(a+2b+2)^2$; $(ab+2)^5$

Risolvi le seguenti espressioni usando i prodotti notevoli

55. $3x^2+(2x-5y)(2x+5y)-y(x-3y)+22y^2+xy$ $[7x^2]$

56. $(3x+1)^2+(2x-3)(-2x-3)-x(5x+1)-(2x-3)^2$ $[-4x^2+17x+1]$

57. $7x(3x+1)+(-4x-1)(+4x-1)-5(x+1)^2+(x-3)^2+9x$ $[x^2+5]$

58. $(xy+x)^2-(x-y)(x+y)-2y(x^2+1)+2y-(xy+1)^2+y(2x-1)$ $[-1]$

59. $(2x+1)^2-(x+1)(x-1)-3x(x-1)-x(x+6)-2^1$ $[-x^2+x]$

60. $(3x-\frac{1}{2})^2+(1-3x)(-3x-1)-\frac{17}{2}x(2x-\frac{6}{17})-\frac{3}{2}$ $[x^2-\frac{9}{4}]$

61. $(1-2x^2)(1+2x^2)+(5x^2-1)^2-2(1-4x^2)^2-[-2x^4-(3x^2-1)^2]$ $[1]$

62. $(3x+\frac{1}{3})^2+(2x+\frac{1}{3})(2x-\frac{1}{3})-2(\frac{1}{6}x+3)-13x^2$ $[\frac{5}{3}x-6]$

63. $(x-1)^2-(x-1)(x+1)(x^2-1)+(x^2+1)^2$ $[5x^2-2x+1]$

64. $(a+1)^4-(a^2+1)(a^2-1)-(a^2+2)(4a+1)$ $[5a^2-4a]$

Paragrafo 1.12

Esegui le seguenti divisioni:

65. $(-\frac{5}{14}ab^3+\frac{4}{7}a^2b^2+a^2b):(-\frac{2}{21}ab)$

66. $(10ab^2c^3-\frac{2}{9}ab^3c^2+\frac{4}{3}a^2b^5c+bc^3):(-\frac{4}{18}bc)$

Paragrafo 1.13

Esegui le seguenti divisioni fra polinomi effettuando al termine la riprova (la verifica)

67. $(2x^2-6x+5):(2x-4)$

68. $(3x^5-2x^2+1):(x^2-2x+2)$

69. $(4x^2 - 4x + 5) : (2x - 4)$

70. $(-11x^3 - 4x^4 + 28) : (x^2 + 3)$

71. $(-5a^3 - 4 + 2a) : (a^2 - a + 3)$

72. $(a^2 - 5a^3 + 6) : (-a^2 + 1)$

73. $(x^5 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1)$

74. $(a^3 - 2a^2 + 6) : (2a^2 + a + 1)$

Paragrafo 1.14

Esegui le seguenti divisioni col metodo di Ruffini:

75. $(x^3 - 5x^2 + 4x + 6) : (x + 2)$

76. $(-x^2 - 3x^4 + 1) : (x - 1)$

77. $(x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$

78. $(-11a^3 - 4a^4 + 28) : (a + 3)$

79. $(x^3 - 5x + 4) : (x - 1)$

80. $(x^4 - 7x - 2) : (x - 2)$

81. $(x^3 - x^2 + x + 1) : (x - 1)$

82. $(2x^2 - 3x^3 - 2x - 1) : (x + 1)$

83. $(x^2 - 5x + 6) : (x - \frac{1}{2})$

84. $(4x^3 - 6x + 2) : (2x - 6)$

85. $(3x^3 - 6x^2 + 5x + 6) : (3x - 3)$

Paragrafo 1.15

Scomponi i seguenti polinomi tramite il raccoglimento a fattor comune:

86. $3a^9 - 5a^7 + a^3y^4; \qquad 14a^3 - 28a^2 + 21a$

87. $x^4 - 31x^2 + x; \qquad x^4y^3 - 2x^2y^2 + 6xy^3$

88. $5x^4 - 5x^2 + 5x; \qquad -3y^3 - x^2y^2 + 6y^3$

89. $123a^2 + a; \qquad 2x^5y^4 - 2x^4y^5$

Scomponi i seguenti polinomi tramite il raccoglimento parziale:

90. $8a^6 - 12a^4 + 4a^2 - 6; \qquad 5a^3 + 2a^2 + 20a + 8$

91. $3a^5 - 9a^3 - 2a^2 + 6; \qquad 5a^9 + a^6 - 15a^3 - 3$

92. $4a^7 + 40a^5 + a^2 + 10; \qquad 10a^7 + 10a^5 + a^2 + 1$

93. $-8a^5 - 10a^4 + 4a + 5; \qquad 6 + 8a^2 + 3a^4 + 4a^6$

94. $(x + 3)^9 - 8(x + 3)^6 - 10(x + 3)^3 + 80; \qquad 20(3a - 1)^4 - 8(3a - 1)^3 + 5(3a - 1) - 2$

Scomponi i seguenti polinomi tramite il riconoscimento di prodotti notevoli:

95. $a^2 - 12a + 36; \qquad a^4 - 9$

96. $-25 + x^2; \qquad 9a^2b^2 + 12ab + 4$

97. $a^2b^2c^2 - 36; \qquad 100x^2 + 4 - 20x$
98. $x^2 + x + \frac{1}{4}; \qquad -25x^4 + y^2$
99. $x^3 - 8; \qquad x^3 + 1$

Scomponi i seguenti polinomi tramite il particolare trinomio di secondo grado:

100. $x^2 - 3x - 10; \qquad x^2 + 4x + 3$
101. $x^2 + 3x - 28; \qquad x^2 + 4x - 32$
102. $x^2 - x - 2; \qquad x^2 + x - 90$
103. $x^2 - 12x + 20; \qquad x^2 + 11x + 30$
104. $x^2 - 30x + 29; \qquad x^2 + 3x - 40$
105. $x^2 - x - 72; \qquad x^2 + 14x + 33$
106. $x^2 - 10x + 24; \qquad x^2 + 2x + 1$
107. $x^2 - 52x + 100; \qquad x^2 + 3x - 30$

Scomponi i seguenti polinomi tramite il metodo di Ruffini:

108. $x^3 - 4x^2 + 9; \qquad x^4 + 4x - 5$
109. $x^4 - 3x^3 + 5x - 2; \qquad 5x^3 - 17x + 6$
110. $x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 2; \qquad x^3 - 15x - 4$
111. $2x^3 - 3x^2 - 10x + 3; \qquad x^5 - 13x - 6$
112. $100x^3 + 50x^2 - 48x + 2; \qquad x^3 - 20x - 25$

Scomponi quando possibile i seguenti polinomi (altrimenti scrivi irriducibile):

113. $6a^6 - 8a^4 + 10a^2; \qquad 4x^2 + 4x + 1$
114. $-a^3 - a^2 - a - 1; \qquad -x^3 + 3x + 2$
115. $x^5 + 4x^4 - 3; \qquad xy^2z - x^2yz + 21y^3;$
116. $7y^4 - 3x^2y; \qquad a^2b^2 - 6ab + 9$
117. $x^2 + 100; \qquad 12a^2 + 4a^3$
118. $-1 + x^2y^2; \qquad 7a^5 - 14a^4 + a^3 - 2a^2 + 5a - 10$
119. $x^2 - 7x + 6; \qquad -4a^4 + 6a^3 + 20a - 30;$
120. $x^3 - 3x^2 - 16; \qquad x^2 + 3x + 4$

Scomponi fino a quando è possibile i seguenti polinomi:

121. $x^3 + 2x^2 - 25x - 50; \qquad x^3 - 2x^2 - x + 2$
122. $x^4 - 16; \qquad x^3 - 7x + 6$
123. $x^3 + 6x^2 + 3x - 10; \qquad x^8 - 4x^6 + 2x^2 - 8$
124. $x^3 + 4x^2 + x - 6; \qquad x^3 - 21x + 20$
125. $1 - x^4; \qquad 5x^3 + 3x^2 - 20x - 12$