Università degli Studi di Palermo

Facoltà di Economia

Dip. di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica Generale

Calcolo Combinatorio

Anno Accademico 2013/2014

V. Lacagnina - S. Piraino

Homines, dum docent, discunt
Quando insegnano, gli uomini imparano
SENECA

Realizzazione e sviluppo in LaTeX di Valerio Lacagnina (14/11/2013)

1. Introduzione

Il calcolo combinatorio ha come oggetto problematiche connesse all'aggregazione di oggetti di un insieme. In particolare studia i modi per raggruppare e/o ordinare, secondo regole date, gli elementi di un insieme finito di oggetti. Il calcolo combinatorio si occupa principalmente di contare i modi in cui si possono aggregare gli oggetti ossia le possibili configurazioni di essi una volta stabilite le regole di aggregazione.

In modo schematico possiamo dire che dati n oggetti (che denomineremo con un numero naturale $1, 2, \ldots, n-1, n$) di natura qualsiasi di un insieme e fissato un valore $k < n$ ci proponiamo di creare gruppi costituiti da k oggetti utilizzando gli n oggetti dati. Nel creare i gruppi ci dobbiamo chiedere se bisogna tener conto dell'ordine o meno.

Esempio 1.1
Sia dato l'insieme costituito dagli elementi $\{1, 2, 3\}$.
Se siamo interessati all'ordine il gruppo formato dai due elementi $1, 2$ è diverso da quello formato dagli stessi elementi ma in ordine differente $2, 1$.
Se, invece, non siamo interessati all'ordine i due gruppi $1, 2$ e $2, 1$ sono la stessa cosa, ossia rappresentano lo stesso raggruppamento.

Tale condizione iniziale influenza, evidentemente, la numerosità dei gruppi formati in quanto, se non interessa l'ordine, due gruppi distinti differiscono per almeno un oggetto (ad esempio $1, 2$; $1, 3$; $2, 3$) mentre, se interessa l'ordine, dobbiamo ancora aggiungere ad essi i gruppi ottenuti dagli stessi oggetti con differente ordine (ecco che nell'esempio di prima essi diventeranno $1, 2$; $2, 1$; $1, 3$; $3, 1$; $2, 3$; $3, 2$).

Nel caso in cui l'ordine non interessa si parla di *combinazioni* di n oggetti a k a k (o di classe k). Se invece siamo interessati all'ordine degli oggetti all'interno dei gruppi si parlerà di *disposizioni* di n oggetti a k a k (o di classe k).

2. Disposizioni

Si chiamano *disposizioni* di n elementi a k a k (o di classe k) i gruppi di k elementi ottenuti dagli n oggetti che differiscono per almeno un oggetto o per l'ordine degli oggetti. Vediamo come possiamo costruire il numero di disposizioni possibili partendo da un esempio.

Esempio 2.1
Sia dato l'insieme con $n = 4$ elementi, $\{1, 2, 3, 4\}$. Voglio ottenere tutti i gruppi di elementi che rappresentano le disposizioni dei 4 elementi di classe 3. Essi sono costituiti da tre oggetti, $\lfloor\ \rfloor\lfloor\ \rfloor\lfloor\ \rfloor$, presi dai 4 dell'insieme. Inizio con il prendere il primo dei tre elementi

del gruppo ossia 1, 2, 3 oppure 4:

1		
2		
3		
4		

Abbiamo ottenuto 4 gruppi. A questo punto dobbiamo scegliere come secondo elemento del gruppo uno qualunque degli elementi ancora non utilizzati ottenendo:

1	2		2	1		3	1		4	1	
1	3		2	3		3	2		4	2	
1	4		2	4		3	4		4	3	

ottenendo in totale 12 gruppi. Finalmente inserisco uno qualunque degli oggetti rimanenti ottenendo 24 gruppi da tre elementi ognuno.

1	2	3	2	1	3	3	1	2	4	1	2
1	2	4	2	1	4	3	1	4	4	1	3
1	3	2	2	3	1	3	2	1	4	2	1
1	3	4	2	3	4	3	2	4	4	2	3
1	4	2	2	4	1	3	4	1	4	3	1
1	4	3	2	4	3	3	4	2	4	3	2

come si vede ogni gruppo differisce dall'altro o per almeno un elemento o per l'ordine degli elementi.

Come posso stabilire a priori il numero di gruppi che si formeranno?
Nell'esempio specifico

4 possibilità	3 possibilità	2 possibilità

poichè abbiamo a disposizione 4 oggetti, si avranno 4 possibili scelte come primo elemento dei gruppi, 3 possibili scelte come secondo elemento dei gruppi e infine 2 possibili scelte come terzo elemento dei gruppi, ossia:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Se generalizziamo quanto visto in piccolo nell'esempio e supponiamo di avere n oggetti che vogliamo disporre a k a k avremo che il numero totale di disposizioni possibili è dato da

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Esempio 2.2
Dati 10 oggetti si vuole conoscere il numero delle disposizioni di classe 4 di essi:

$$D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (10 - 4 + 1) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

3. Permutazioni

Cosa succede alle disposizioni se $k = n$ ossia se le classi che voglio organizzare sono costituite da tutti gli n oggetti a disposizione? I gruppi ottenuti differiscono solo in base all'ordine con cui sono disposti gli oggetti. In tal caso, invece di parlare di disposizioni di n oggetti a n a n ($D_{n,n}$) si parlerà di *permutazioni* di n oggetti. Si vede facilmente che

$$D_{n,n} = P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

$n!$ si chiama *fattoriale* di n. Inoltre assumendo che

$$0! \triangleq 1$$

è possibile definire per ricorsione il fattoriale di un numero intero n come

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Esempio 3.1
Supponiamo di avere $n = 10$ oggetti, come nell'esempio precedente. Se vogliamo sapere quanti sono i gruppi ottenibili permutando tutti i 10 oggetti dobbiamo calcolare

$$P_{10} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$$

Come si vede il numero di gruppi ottenuto è estremamente grande, già per un valore di n abbastanza piccolo.

4. Combinazioni e coefficienti binomiali

Si chiamano *combinazioni* di n elementi a k a k (o di classe k) i gruppi di k elementi ottenuti dagli n oggetti che differiscono per almeno un oggetto (in tel senso non ci interessa l'ordine degli elementi all'interno del gruppo). Per individuare la numerosità di tali gruppi riprendiamo l'esempio 2.1

Esempio 4.1
Sia dato l'insieme con $n = 4$ elementi, $\{1, 2, 3, 4\}$. Voglio ottenere tutti i gruppi di elementi che rappresentano le combinazioni dei 4 elementi di classe 3. Essi sono costituiti da tre oggetti, $\lfloor\,\rfloor\lfloor\,\rfloor\lfloor\,\rfloor$, presi dai 4 dell'insieme e non posso ottenere due gruppi con gli stessi

oggetti anche se in ordine differente. Inizio con il prendere il primo dei tre elementi del gruppo ossia 1, 2, 3 oppure 4:

1		
2		
3		
4		

Abbiamo ottenuto 4 gruppi. A questo punto dobbiamo scegliere come secondo elemento del gruppo uno qualunque degli elementi ancora non utilizzati avendo cura che se esiste il gruppo $\underline{|\ a\ |\ b\ |}$ non posso formare il gruppo $\underline{|\ b\ |\ a\ |}$:

1	2	
1	3	
1	4	
2	3	
2	4	
3	4	

come si vede il numero di gruppi ottenuto è di gran lunga inferiore a quelli dell'esempio 2.1. Finalmente posso procedere ad aggiungere il terzo elemento.

1	2	3
1	2	4
1	3	4
2	3	4

Ho ottenuto in totale 4 gruppi differenti.

Come posso stabilire a priori il numero di gruppi che si formeranno?

Nell'esempio specifico se costruissi tutti i gruppi ottenuti dalle disposizioni di 4 elementi di classe 3 dovrei eliminare tutte le possibili permutazione di tre oggetti lasciandone una sola ossia

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{24}{6} = 4$$

Generalizzando quanto visto nell'esempio le combinazioni di n oggetti a k a k sono:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Se in particolare $k = n$ otterremo $C_{n,n} = 1$ dato che $D_{n,n} = P_n$.

Esempio 4.2
Si vuole il numero di combinazioni di 10 oggetti di classe 4.

$$C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = \frac{\cancel{10}^{\,5} \cdot \cancel{9}^{\,3} \cdot \cancel{8}^{\,2} \cdot 7}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} = 210$$

Se si va a confrontare il numero di gruppi ottenuti con quello delle disposizioni di 4 elementi di classe 3 pari a 5040 si vede immediatamente che il numero di combinazioni è estremamente ridotto rispetto al numero di disposizioni di pari classe.

Posso migliorare la formula per il calcolo del numero di combinazioni tenendo conto che se moltiplico il numeratore per $(n-k)!$ otterrò $n!$. Evidentemente devo anche dividere per lo stesso valore. Otterrò un nuovo oggetto, equivalente alle combinazioni di n oggetti di classe k che chiameremo *coefficiente binomiale*:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Il coefficiente binomiale si legge n sopra k.

Esempio 4.3

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{6!} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$$

Si noti che

$$\binom{n}{0} \triangleq 1 \; ; \qquad \binom{n}{n} = 1$$

Fissato il numero n di oggetti posso individuare $n+1$ coefficienti binomiali

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

Mi rendo conto immediatamente che

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

e che

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$$

$$\ldots$$

e quindi in generale i coefficienti binomiali godono della proprietà di simmetria nei valori che posso esplicitare sinteticamente con

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Per dimostrarlo basta vedere che

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(\cancel{n}-\cancel{n}+k)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

5. Binomio di Newton

I coefficienti binomiali sono estremamente utili in algebra per il calcolo dei coefficienti della potenza ennesima di un binomi. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, vogliamo calcolare

$$(a+b)^n$$

Partiamo da $n = 2$:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$$

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = (a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b)\cdot(a+b) =$$

$$= a\cdot a\cdot a + a\cdot a\cdot b + a\cdot a\cdot b + a\cdot b\cdot b + a\cdot a\cdot b + a\cdot b\cdot b + a\cdot b\cdot b + b\cdot b\cdot b$$

$$\dots$$

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ volte}}$$

Si nota subito che se k è la potenza a cui si eleva il binomio, il grado dei monomi ottenuti è pari a k (sommiamo il grado di a a quello di b). Ad esempio nel caso $(a+b)^3$ avremo i monomi a^3, a^2b, ab^2, b^3. Il numero di gruppi di tali differenti monomi dipende dalle possibili scelte che posso fare per ottenere il grado 3, ossia, nel caso più generale possibile

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \binom{n}{n} a^0 b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Esempio 5.1

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4 =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Esempio 5.2
Nello sviluppo di $(a+b)^{10}$ si vuole sapere quale è il coefficiente del termine a^7b^3.

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120$$

Esempio 5.3
Se ho $(a+b)^8$ quale è il coefficiente binomiale di a^3b^4?
Evidentemente non esiste in quanto il grado del monomio a^3b^4 è 7 e non 8.

Supponiamo di volere sviluppare $(a-b)^n$. Lo sviluppo del binomio si può effettuare pensandolo come $(a+(-b))^n$ che sappiamo già fare

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(-b)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(-1)^k b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k$$

Supponiamo ora che $a = b = 1$. Se consideriamo lo sviluppo del binomio di Newton, in tal caso si avrà

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \tag{1}$$

Tale risultato è importante per individuare la cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme A di n elementi. Infatti, siano $\binom{n}{0}$ il numero di insiemi senza elementi estraibili da A, $\binom{n}{1}$ il numero di insiemi con 1 elemento estraibili da A, $\ldots$, $\binom{n}{n}$ il numero di insiemi di n elementi estraibili da A, si vede subito che la cardinalità dell'insieme delle parti è proprio la (1).

Per concludere, supponiamo ora $a = 1$ e $b = -1$, poichè $(1-1)^n = 0$ si ha che

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

che implica che la somma degli $n+1$ coefficienti binomiali presi a segni alterni deve essere nulla.

Esercizio 5.1
Sviluppare il binomio di Newton $\left(xy - \frac{1}{z}\right)^{10}$

Indice

1. Introduzione 3
2. Disposizioni 3
3. Permutazioni 5
4. Combinazioni e coefficienti binomiali 5
5. Binomio di Newton 8