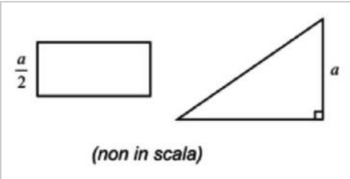
1) Un gioco per bambini consiste nell'inserire oggetti di diversa forma negli spazi corrispondenti alla forma dell'oggetto. Tra gli oggetti vi sono un rettangolo e un triangolo rettangolo. - La base del rettangolo è lunga tre volte la sua altezza. - I lati del triangolo a, b, c sono in ordine di lunghezza crescente. - Il lato a del triangolo è lungo due volte l'altezza del rettangolo. - Le aree delle due figure sono uguali.

Qual è il rapporto a:b?



1:2 1:3 1:4 2:3 3:4

Soluzione: $A_r = base * altezza = \frac{a}{2}\frac{3a}{2} = \frac{3}{4}a^2; \quad A_t = \frac{ab}{2}; \; A_r = A_t \Rightarrow \frac{3}{4}a^2 = \frac{ab}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2:3$

2) Risolvere la seguente disequazione:

$$(2x+1)^2 < 9$$

- 1 < x < 2 - 2 < x < 1 - 1/2 < x < 1 x < -2 o x > 1 x < 1

Soluzione: $(2x+1)^2 < 9 \Rightarrow -3 < 2x+1 < 3 \Rightarrow -4 < 2x < 2 \Rightarrow -2 < x < 1$

3) Un torneo di calcio si svolge in due fasi. Nella prima fase le squadre sono suddivise in 8 gruppi di ugual numero. Ciascuno squadra gioca una sola volta contro ogni squadra del proprio gruppo. La vincitrice di ciascun gruppo si qualifica per la seconda fase a eliminazione diretta. Al termine del torneo la squadra vincente avrà disputato 8 partite.

Quante squadre prendono parte alla prima fase del torneo?

a) 48 b) 24 c) 40 d) 8 e) 64

Soluzione: Se chiamiamo x il numero di squadre di ogni gruppo, la squadra vincente dovrà effettuare $(x-1)$ partite nella prima fase. Considerando che nella seconda fase, a eliminazione diretta, vi sono 8 squadre la squadra vincente deve affrontare in tutto 3 partite $8 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ per cui se il totale di partite affrontate deve essere 8 si ottiene l'equazione: $x - 1 + 3 = 8$ da cui si ottiene $x = 6$ e poiché nella prima fase vi sono 8 gruppi in totale le squadre partecipanti sono 8 * 6 = 48

4) Un reticolo stradale consiste in una serie di strade percorribili da nord a sud e in una serie di strade percorribili da est a ovest. A ogni intersezione vi è una rotatoria. A causa di alcuni lavori in corso, Michele non può percorrere il tragitto con la sua auto direttamente dal punto X al punto Y: partendo dal punto X, viaggia verso est per 2 minuti, quindi in direzione nord per 3 minuti, poi in direzione ovest per 2 minuti, infine verso nord per 3 minuti fino a raggiungere il punto Y.

Se Michele viaggia ad una velocità media di 30 km/h in ogni tratto del suo percorso qual è la distanza in linea d'aria tra il punto X e il punto Y?

a) 9 km b) 5 km c) 4 km d) 2 km e) 3 km

Soluzione: poiché Michele viaggia 2 min verso est e 2 min verso ovest, alla stessa velocità media, la distanza percorsa in queste due direzioni non è importante. Quindi in termini di tempo la distanza in linea d'aria fra X e Y è pari a 3 + 3 min = 6 min e quindi:

$$30\frac{km}{h} * 6\,min = 30\frac{km}{60\,min} * 6\,min = \frac{30}{10}km = 3\,km$$

5) Teresa vuole installare alcune mensole in una nicchia di 80 cm di larghezza dove riporvi 100 libri con spessore 25 mm l'uno e 62 libri con spessore di 35 mm l'uno. Ha in progetto di acquistare 560 cm di legname per realizzare le mensole e non ha intenzione di riporre i due tipi di libri su una stessa mensola.
Qual è il numero massimo di libri in più che Teresa può acquistare prima di dover installare altre mensole?
a) 24 b) 15 c) 12 d) 32 e) 35

Soluzione: Il legname acquistato consente di costruire:

$$\frac{560\ cm}{80\,\frac{cm}{mensola}} = 7\ mensole$$

per i 100 libri si occuperà uno spazio pari a:

$$\frac{2.5\,\frac{cm}{libro} * 100\ libri}{80\,\frac{cm}{mensola}} = 3.125\ mensole \cong 4\ mensole$$

per i 62 libri si occuperà uno spazio pari a:

$$\frac{3.5\,\frac{cm}{libro} * 62\ libri}{80\,\frac{cm}{mensola}} = 2.7125\ mensole \cong 3\ mensole$$

Esaurendo le mensole costruibili con il legname acquistato.
Nelle mensole con i libri da 2.5 cm di spessore può in realtà inserire oltre ai 100 libri:

$$\frac{4\ mensole * 80\,\frac{cm}{mensola}}{2.5\,\frac{cm}{libro}} - 100\ libri = \frac{320\ cm}{2.5\,\frac{cm}{libro}} - 100\ libri = 128\ libri - 100\ libri = 28\ libri$$

Nelle mensole con i libri da 3.5 cm di spessore può in realtà inserire oltre ai 62 libri:

$$\frac{3\ mensole * 80\,\frac{cm}{mensola}}{3.5\,\frac{cm}{libro}} - 62\ libri = \frac{240\ cm}{3.5\,\frac{cm}{libro}} - 62\ libri = 66.5714\ libri - 62\ libri \cong 4\ libri$$

per un totale di altri 28 + 4 = 32 libri.

6) Paolo lavora dal lunedì al venerdì e, a settimane alterne, anche il sabato.
Qual è il numero massimo di giorni lavorativi di Paolo in un mese?
a) 21 b) 22 c) 23 d) 24 e) 25

Soluzione: è importante stabilire il numero massimo di giorni lavorativi che possono cadere in un mese di lunghezza massima ossia 31 giorni:

$$\frac{31\,\frac{giorni}{mese}}{7\,\frac{giorni}{settimana}} * 5\,\frac{giorni}{settimana} \cong 4{,}42\ settimane * 5\,\frac{giorni}{settimana} \cong 22\ giorni$$

Poiché al massimo in un mese possono cadere 5 sabati e supponendo che il primo è lavorativo bisogna aggiungere altri 3 giorni da cui il totale dei giorni lavorativi è 22 + 3 = 25

7) Un gruppo di 10 ciclisti è composto da 6 uomini e 4 donne. I 10 ciclisti pesano in media 74 kg. Il peso medio dei 6 uomini è 82 kg.
Quanto pesano in media le donne?
a) 62 kg b) 63 kg c) 64.5 kg d) 66 kg e) 72 kg

Soluzione:
Sia x_u il peso totale uomini e x_d il peso totale delle donne, il peso medio dei 10 ciclisti è dato da:
$\frac{x_u + x_d}{10} = 74$, da cui $x_u + x_d = 740$. Il pesototale degli uomini è $\frac{x_u}{6} = 82$ da cui $x_u = 492$.
Il peso totale delle donne è quindi $x_d = 740 - x_u = 740 - 492 = 248$ da cui il peso medio delle donne è $\frac{x_d}{4} = \frac{248}{4} = 62\ kg$

8) Quale delle seguenti è un'equazione di una retta perpendicolare alla retta $4x + 6y = 5$?
a) $2x + 3y = 5$ b) $6x + 4y = 17$ c) $4x + 6y = 21$ d) $3x - 2y = 14$ e) $x + 3y = 1$

Soluzione: sono tutte rette in forma implicita del tipo $ax + by = c$ il cui coefficiente angolare è dato da $m = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$; il coefficiente angolare della retta perpendicolare a questa sarà $m_p = -\frac{1}{m}$
Il coefficiente angolare della retta è $m = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ *e quello della* $m_p = \frac{2}{3}$
vediamo quali delle risposte è corretta:
$a) -\frac{3}{2}$ NO; $b) -\frac{4}{6}$ NO; $c) -\frac{6}{4}$ NO; d) $\frac{2}{3}$ **SI**

9) La probabilità con cui un paziente deve attendere meno di 10 minuti il proprio turno in un ambulatorio medico è 0.8.
Qual è la probabilità che una paziente che si reca due volte presso l'ambulatorio medico attenda, almeno una delle volte, meno di 10 minuti prima di essere ricevuta dal medico?
a) 0.96 b) 0.25 c) 0.64 d) 0.04 e) 0.8

Sia A l'evento tempo di attesa < 10 min, e $\bar{A}$ *tempo di attesa* ≥ 10 min, allora $p(A_i) = 0.8$, da cui la probabilità che il tempo di attesa sia superiore a 10 min è $p(\bar{A}_i) = 1 - p(A_i) = 0.2$.
Poiché la realizzazione di A_1 e A_2 sono indipendenti, la probabilità è il prodotto delle probabilità di attesa.
Inoltre le possibilità che in almeno una delle due attese si aspetti meno di 10 min sono le seguenti:
$(A_1 \wedge \bar{A}_2) \vee (\bar{A}_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_2)$ che sono tre eventi mutualmente esclusivi la cui probabilità la somma delle probabilità associate da cui:
$p(A_1 \wedge \bar{A}_2) + p(\bar{A}_1 \wedge A_2) + p(A_1 \wedge A_2) = 0.2 * 0.8 + 0.8 * 0.2 + 0.8 * 0.8 = 0.16 + 0.16 + 0.64 = 0.96$

10) La tipografia "Marconi" ha deciso di stampare il nuovo elenco telefonico in caratteri più piccoli per risparmiare carta. Di conseguenza, ora si possono stampare 4 colonne invece di 3. Ogni colonna contiene, inoltre, il 25% in più di nominativi il vecchio elenco che aveva 750 pagine.
Quante pagine ha il nuovo elenco telefonico?
a) 250 b) 300 c) 450 d)500 e) 600

Soluzione: Il vecchi elenco telefonico ha un numero di pagine equivalenti pari a 750 * 3 = 2250. Il nuovo elenco telefonico sarà tale che le pagine equivalenti del nuovo elenco contengono il 25% in più del vecchio:
$p_{ne}(1 + 0.25) = p_{ve} \Rightarrow p_{ne} = \frac{p_{ve}}{1.25} = \frac{2250}{1.25} = 1800$ pagine, e poiché il nuovo elenco usa quattro colonne, le pagine totali saranno $\frac{1800}{4} = 450$

11) L'orologio di una chiesa suona le ore battendo il numero corrispondente di rintocchi ogni ora dalle 9 di mattina (9 rintocchi) alle 9 di sera (9 rintocchi) e un rintocco alla mezz'ora in questo arco di tempo. Per il resto del tempo non batte alcun rintocco.
Qual è il numero totale di rintocchi che l'orologio batte ogni giorno?
a) 99 b) 89 c) 90 d) 100 e) 103

Il quesito si risolve velocemente ricordando che la somma dei primi n numeri primi è pari a:
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
e quindi i rintocchi mattutini sono:
$$\sum_{i=9}^{12} i = \sum_{i=1}^{12} i - \sum_{i=1}^{9} i = \frac{12 * 13}{2} - \frac{8 * 9}{2} = 78 - 36 = 42$$
I rintocchi del pomeriggio sono:

$$\sum_{i=1}^{9} i = \frac{9 * 10}{2} = 45$$

Ricordando che rintocchi della mezz'ora sono pari a 21-9 = 12 si ha un totale di 42+45+12=99 rintocchi.

12) Al supermercato le confezioni di caffè da 500g sono sempre in offerta speciale, tuttavia le offerte variano di settimana in settimana:
Settimana 1: una confezione da 250g in omaggio con l'acquisto di 2 confezioni;
Settimana 2: 25% di sconto sul prezzo intero;
Settimana 3: una confezione in omaggio con l'acquisto di 3 confezioni;
Settimana 4: 10% di sconto sul prezzo indicato e ulteriori 100g in omaggio;
Settimana 5: con l'acquisto di una confezione, la seconda è a metà prezzo.
Sebbene le quantità cambino, il costo del caffè per 100g in ciascuna delle offerte sopra elencate rimane invariato tutte le settimane, eccetto una: quale?
a) Settimana 1 b) Settimana 2 c) Settimana 3 d) Settimana 4 e) Settimana 5

Soluzione: Settimana 1: sia p_i il prezzo effettivo con la promozione e *p* il prezzo di riferimento del caffè:

$$(500 + 500 + 250)p_1 = (500 + 500)p \Rightarrow p_1 = \frac{1000}{1250}p = \frac{4}{5}p$$

Settimana 2:

$$p_2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)p = \frac{3}{4}p$$

Settimana 3:

$$(500 + 1500)p_3 = 1500p \Rightarrow p_3 = \frac{1500}{2000}p = \frac{3}{4}p$$

Settimana 4:

$$(100 + 500)p_4 = 500 * 0.9\,p \Rightarrow p_4 = \frac{500}{600}0.9\,p = \frac{5}{6}0.9\,p = \frac{5}{6}\frac{9}{10}p = \frac{3}{4}p$$

Settimana 5:

$$(500 + 500)p_5 = 500\,p + 500\frac{p}{2} \Rightarrow p_5 = \frac{500}{1000}\left(1 + \frac{1}{2}\right)p = \frac{1}{2}\frac{3}{2}p = \frac{3}{4}p$$

Ossia la settimana 1

13) Completare correttamente la seguente successione numerica: 101; 104; 79; 65; 68; 43; ?; ?
a) 29; 32 b) 29; 4 c) 46; 32 d) 18; 21 e) 29; 42

Soluzione: poichè 104-101=3, 79-104=-25, 65-79=-14; 68-65=3; 43-68=-25 mancano nella sequenza 43-14=29 e 29+3=32 ossia la (a)

14) Una biblioteca contiene 160 libri così suddivisi per materia: biologia 20%, medicina 30%; letteratura 35%, chimica 5%; storia 10%.
I libri di quali materie, tra loro sommati, sono 48?
a) biologia e storia b) biologia e letteratura c) medicina e storia d) letteratura e storia e) biologia e chimica

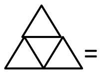
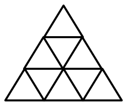
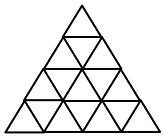
Soluzione: Il numero di libri per ogni materia sono b=160*0.2=32; m=160*0.3=48; l=160*0.35=56; c=160*0.05=8; s=160*0.1=16. Bisogna prendere a due a due in modo da ottenere 48. Si noti che escludiamo m ed l perché maggiori o uguali a 48. Rimangono b, c ed s, ed è facile vedere che b+s=32+16=48

15) Una regola di elaborazione trasforma l'ottupla (1,4,6,3,9,7,8,5) in (4,1,6,3,9,7,8,5) e questa in (4,6,1,3,9,7,8,5). *Individuare l'ottupla successiva secondo la stessa regola.*
a) (4,6,3,1,7,9,8,5) b) (4,6,1,9,3,7,8,5) c) (4,6,1,3,7,9,8,5) d) (4,6,1,3,9,7,8,5) e) (4,6,3,1,9,7,8,5)

Soluzione: nel passare dalla prima ottupla alla seconda si scambiano la 1ma con la 2da posizione, mentre passando dalla seconda ottupla alla successiva vengono scambiate la 2da con la 3za posizione. Evidentemente la nuova ottupla vedrà scambiata la posizione 3za con la 4ta, ossia: (4,6,3,1,9,7,8,5) e quindi la risposta e.

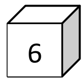
16) La piccola Aurelia sta giocando con 985 tessere di legno colorato, tutte a forma di triangolo equilatero e aventi le stesse dimensioni. Ha costruito con esse, affiancandole, il triangolo equilatero più grande possibile; *quante tessere sono avanzate ad Aurelia?*
a) 31 b) 26 c) 25 d) 24 e) 23

Soluzione: Per costruire un triangolo equilatero basta affiancare le tessere in modo opportuno, ma ci vuole un ben preciso numero di tessere:

 = 1;  = 4;  = 9;  = 16 con evidente sviluppo $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, n^2$

per tale motivo il numero di tessere utilizzate è tale che $n^2 = 985$ ossia la parte intera per difetto di $n = \lfloor\sqrt{985}\rfloor = 31$ da cui $985 - 31^2 = 985 - 961 = 24$

17) Il prodotto delle tre facce visibili del dado in figura dà come risultato 90.
Quanto valgono rispettivamente il lato A e il lato B?



a) 3; 1 b) 4; 1 c) 4; 2 d) 5; 3 e) 5; 4

Soluzione: poiché il prodotto dei tre lati vale 90 si ha che A * B * 6 = 90 da cui A * B = 15 che come unica soluzione ha 5; 3 dato che 5 * 3 =15.

18) Si tenga presente che a segno uguale corrisponde cifra uguale. Se ⬭ + ⬭ = ☺♡ e se ♡ = 0 allora ☺ = ?
a) 5 b) 1 c) 7 d) impossibile e) 3

Soluzione: trasformiamo la scrittura grafica in una scrittura matematica: $x + x = y * 10$ da cui si ottiene $2x = 10\,y \Rightarrow x = 5y$ facciamo assumere a *y* i valori delle risposte: se $y = 5 \Rightarrow x = 10$, se $y = 1 \Rightarrow x = 5$ che è la soluzione cercata.

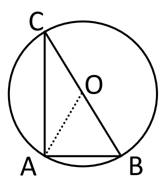
19) $\cos\,(a + b)$ equivale a:
a) $\cos(a)\cos(b) - \sin\,(a)\sin(b)$ b) $1 - \sin(a + b)$ c) $2\cos\,(a)\sin\,(b)$ d) $\sin(a - b)$ e) $\cos(a)\sin(b) - \sin\,(a)\cos(b)$

Soluzione: la risposta corretta è la (a), si tratta della formula di addizione per il cos.

20) L'equazione $x^2 + 49 = 0$ ha soluzioni:
a) reali b) non reali c) $x_1 = x_2 = -7$ d) $x_1 = x_2 = 7$ e) c) $x_{1,2} = \pm 7$

Soluzione: poiché $x^2 + 49 = 0 \Rightarrow x^2 = -49$ non ammette soluzioni reali quindi la risposta corretta è (b).

21) Sapendo che l'angolo AOB misura 50°, quanto misura l'angolo ABC?
a) 155° b) 90° c) 65° d) 50° e) 25°



Soluzione: il triangolo AOB è isoscele e quindi gli angoli alla base

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{180 - 50}{2} = 65°$$

22) Quale delle seguenti equazioni rappresenta la retta passante per l'origine degli assi e per il punto (6; 3)?
a) y=(1/2)x b)y=3x+3 c) y=2x d) y=x-3 e) y=x

Soluzione: La retta deve passare per i due punti (0; 0) e (6;3) e la sua equazione è del tipo:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-0}{3-0}=\frac{x-0}{6-0}\Rightarrow\frac{y}{3}=\frac{x}{6}\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

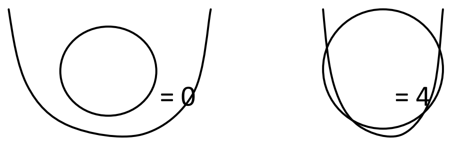
23) Tre marinai sbucciano un sacco di patate rispettivamente in 3, 4 e 6 ore. Quante ore impiegano a sbucciare insieme le patate di 45 sacchi?
a) Non si può calcolare b) 12 c) 13 d) 60 e) 120

Soluzione: In t ore ogni marinaio riesce a sbucciare t/3, t/4 e t/6 sacchi rispettivamente, per 45 sacchi insieme si ha:

$$\frac{t}{3}+\frac{t}{4}+\frac{t}{6}=45\Rightarrow\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)t=45\Rightarrow\frac{4+3+2}{12}t=45\Rightarrow\frac{9}{12}t=45\Rightarrow\frac{3}{4}t=45\Rightarrow t=45\frac{3}{4}=60$$

24) Quanti punti di intersezione possono avere una circonferenza e una parabola, come minimo e come massimo rispettivamente?
a) 0 e 4 b) 1 e 3 c) 2 e 2 d) 2 e 4 e) 1 e 4

Soluzione: graficamente



25) La somma di due numeri dispari consecutivi è sempre divisibile:
a) per 4 b) per 2 ma non per 4 c) per 4 ma non per 3 d) per 2 ma non per 3 e) non è possibile stabilirlo

Soluzione: se n è pari, ossia $n = 2p$, due numeri dispari consecutivi sono $(n+1)$ ed $(n+3)$ ma:
$n+1+n+3=2n+4=4\left(\frac{n}{2}+1\right)=4(p+1)$ ossia la risposta (a)

26) Le soluzioni della disequazione $\frac{x^2+25}{x^2-4x}\geq 0$ sono:
a) nessuna delle altre b) $0<x<4$ c) $x\leq 0; x\geq 4$ d) $0\leq x\leq 4$ e) $x\leq 0; x>4$

Soluzione: poiché il numeratore $x^2+25>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ il segno dipende dal denominatore che non si può annullare: $x^2-4x>0\Rightarrow x(x-4)>0\Rightarrow x<0; x>4$ e la risposta corretta è la (a)

26) Se sen(x)=2/3 e 90°<x<180°, allora sen(2x) vale:
a) $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ b) 4/3 c) $-\frac{2\sqrt{5}}{9}$ d) -1/9 e) $-\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Soluzione: per le formule di duplicazione: sen (2x) = 2 sen(x) cos(x), inoltre in 90°<x<180°,
$cos(x)=-\sqrt{1-\text{sen}^2\,x}$ da cui si ottiene:

$$\text{sen}\,(2x)=\ 2\,\text{sen}(x)\cos(x)=-2\,\text{sen}(x)\sqrt{1-\text{sen}^2\,x}=-2\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{4}{9}}=-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{9}}=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

27) completare correttamente la seguente successione, utilizzando l'alfabeto italiano:
E; 5; I; 6; Q; 11; U; 17; ?; ?
a) D; 28 b) I; 26 c) F; 29 d) D; 23 e) E; 23

Soluzione: poiché nella sequenza la parte numerica è tale che 5+6=11, 6+11=17 evidentemente il prossimo numero varrà 11+17=28 e quindi la soluzione giusta è la (a).

28) 34 ricamatrici producono a macchina 1768 centrini al giorno. Lavorando allo stesso ritmo, quanti centrini verranno confezionati al giorno da 60 ricamatrici?
a) 3060 b) 3120 c) 3300 d) 3400 e) 3420

Soluzione: sia *x* il numero di centrini confezionato dalle 60 ricamatrici. Si risolve tramite una proporzione:

$$34: 1768 = 60: x \Rightarrow \frac{34}{1768} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 1768}{34} = 3120$$

29) Una palestra ha venduto 400 abbonamenti in ottobre e 480 in novembre. In dicembre si è registrato un decremento del 15% rispetto al mese precedente. A quanto ammonta la variazione percentuale degli abbonamenti venduti nel mese di dicembre rispetto a quelli di ottobre?
a) non è possibile stabilirlo b) 1% c) 2% d) -5% e) 5%

Soluzione: Prima di tutto è necessario calcolare il numero di abbonamenti di dicembre:

$$v_D = 480(1 - 0.15) = 480 \cdot 0.85 = 408$$

Ricordando che la variazione percentuale di *a* rispetto a *b* si calcola come *var*%=(*a*-*b*)/*a* si ottiene

$$var\% = \frac{408 - 400}{400} = 0.02 = 2\%$$

30) l'anno scorso le automobili straniere importate in Italia sono state 250000, mentre quest'anno sono salite del 40%. Quest'anno si è registrato un 30% di importazioni dal mercato giapponese.
Quante sono state le auto straniere NON giapponesi importate quest'anno?
a) 90000 b) 210000 c) 245000 d) 270000 d) 420000

Soluzione: Il numero di auto straniere importate in Italia quest'anno è: 250000 (1+0.4) = 350000
Poiché le auto giapponesi sono il 30% di tutte le auto straniere, allora quelle NON giapponesi sono:
350000 (1-0.3) = 245000

31) Una barca ha compiuto i 5/8 del suo tragitto. Se ha navigato per 15 km, quanti chilometri è lungo il tragitto?
a) 24 b) 13 c) 40 d) 75 e) 48

Soluzione: sia x_{TOT} il numero di km totali del tragitto allora:

$$\frac{5}{8}x_{TOT} = 15 \Rightarrow x_{TOT} = \frac{8}{5}15 = 24$$

32) Si consideri, nel piano cartesiano, la circonferenza data dall'equazione $x^2 + y^2 - 2x = 15$.
In quale punto essa interseca il semiasse positivo delle ascisse?
a) 4 b) 5 c) 6 d) 16 e) 17

Soluzione: Poiché l'asse delle ascisse corrisponde alla retta di equazione $y = 0$, sostituendo tale valore nell'equazione della circonferenza potremo trovare le intersezioni, se esistono, con l'asse delle *x* e di queste prendere quella positiva: $x^2 - 2x = 15 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 1 + 15 = 16 = 4^2$ da cui

$$x = 1 \mp 4 =< \begin{matrix} -3 \text{ da rigettare} \\ 5 \text{ accettabile} \end{matrix}$$

33) Quali sono le soluzioni della disequazione $2^{x+3} \geq 0$?
a) per ogni *x* reale b) mai c) *x* > -3 d) *x* < -3 e) -3 < *x* < 3

Soluzione: poiché si tratta di una esponenziale, questa risulta sempre positiva e quindi la risposta corretta è la (a).

34) La somma $2.1 \cdot 10^4 + 3.5 \cdot 10^3$ dà come risultato:
a) $24.5 \cdot 10^3$ b) $5.6 \cdot 10^7$ c) $5.6 \cdot 10^4$ d) $2.45 \cdot 10^7$ e) $5.6 \cdot 10^{12}$

Soluzione: $2.1 \cdot 10^4 + 3.5 \cdot 10^3 = 21 \cdot 10^3 + 3.5 \cdot 10^3 = (21 + 3.5)10^3 = 24.5 \cdot 10^3$

35) Sapendo che $5 \log x = \log 32$ si può affermare che *x* è uguale a:
a) -5 b) 0.5 c) 2 d) 5 e) $4/(2)^{-1/2}$

Soluzione: $5 \log x = \log 32 \Rightarrow \log x^5 = \log 2^5 \Rightarrow x^5 = 2^5 \Rightarrow x = 2$

36) Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa uguale a 25 cm. I suoi cateti misurano in cm:
a) 15 e 20 b) 7 e 20 c) 5 e 25 d) 9 e 16 e) 14 e 15

Soluzione: applicando Pitagora alle risposte si ha (a) $625 = 225 + 400$ SI, (b) $625 = 49 + 400$ NO, etc...

19) Francesco acquista dei bigliettini per invitare alcuni amici alla sua festa di compleanno. In cartoleria i bigliettini vengono venduti singolarmente al prezzo di euro 0.43 l'uno, oppure in confezioni da 6 al prezzo di euro 1.92 a confezione. Francesco acquista 8 confezioni. Dopo avere spedito gli inviti si rende conto che gli sono serviti solo 38 bigliettini.
Quanto ha speso in euro Francesco più del necessario per acquistare i bigliettini di invito?
a) 2.98 b) 3.64 c) 4.70 d) 1.72 e) 1.06

Soluzione: 38 bigliettini ⇒ 6 confezioni da 6 + 2 biglietti singoli ⇒
$6 \cdot 1.92 + 2 \cdot 0.43 = 11.52 + 0.86 = 12.38, \text{invece Francesco ha speso } 8 \cdot 1.92 = 15.36$ quindi Francesco ha speso 15.36 - 12.38 = 2.98 euro in più del necessario.

20) Il mese scorso 5 squadre di pallavolo hanno partecipato a un mini-campionato. Ciascuna squadra ha giocato contro ogni altra squadra due partite. In totale sono state giocate 20 partite. Non vi era possibilità di pareggio, ma solo vittoria o sconfitta. La tabella riporta solo alcuni dei risultati ottenuti a fine campionato:

	Vittorie	Sconfitte
Sq1	6	?
Sq2	1	?
Sq3	?	?
Sq4	?	6
Sq5	?	2

Quante partite ha vinto la squadra 3?
a) 5 b) 3 c) 4 d) 2 e) 6

Soluzione: Ogni squadra affronta 4 · 2 = 8 partite quindi la Sq1 ne vince 6 ma ne perde 8-6=2, la Sq2 ne vince 1 ma ne perde 8-1=7, la Sq6 ne perde 6 ma ne vince 8-6=2 e la Sq5 ne perde 2 ma ne vince 8-2=6. Riempiendo la tabella con questi risultati si ha:

	Vittorie	Sconfitte	Totale partite
Sq1	6	2	8
Sq2	1	7	8
Sq3	x_v	x_p	8
Sq4	2	6	8
Sq5	6	2	8
Tot	15 + x_v	17 + x_p	40

si noti che le partite in totale sommano a 40 ma ciò è apparente in quanto le partite effettive sono 40/2=20. Infatti se la partita Sq1 vs Sq2 è la stessa di Sq2 vs Sq1. Poiché 15 + x_v = 20 e 17 + x_p = 20 si ottiene x_v = 5 e x_p =3.

21) Un agricoltore possiede un vasto appezzamento di terreno delimitato da un ripido strapiombo e intende recintare un campo rettangolare all'interno di tale terreno. Per realizzare questo progetto ha acquistato 16 pannelli da recinzione di 2 m ciascuno (che non possono essere tagliati) e utilizza la parte dello strapiombo come uno dei lati per delimitare l'appezzamento.
Quanto misura in metri quadrati la superficie più ampia che può essere recintata?
a) 128 m^2 b) 256 m^2 c) 32 m^2 d) 56 m^2 e) 64 m^2

Soluzione: Sia p il numero di pannelli da utilizzare in uno dei due lati e la lunghezza di esso sia $x = 2p$, sia q il numero di pannelli da utilizzare nel lato parallelo allo strapiombo e $y = 2q$ la sua lunghezza. L'area del rettangolo è data da $A = x\,y = 2\,p\,2\,q = 4\,p\,q$, la somma dei pannelli utilizzati deve essere eguale a 16 e quindi $2p + q = 16$ da cui $q = 16 - 2p$ si deve massimizzare l'area

p	*q*	4 *p q*	
1	14	56	
2	12	96	
3	10	120	
4	8	128	Valore cercato
5	6	120	

22) Il servizio di autobus Bologna-Parma ha una corsa diretta che parte ogni 12 min da ciascuna delle due città. Il servizio ha inizio contemporaneamente in entrambe le città. Il tragitto richiede 1 h e 5 min in ciascuna direzione e gli autobus sostano almeno 5 min presso la stazione di arrivo.
Qual è il numero minimo di autobus necessari per fornire il servizio?
a) 6 b) 8 c) 10 d) 11 e) 12

Soluzione: 1h +5 min + 5 min sosta = 60 + 10 min =70 min. In questo tempo deve partire un autobus ogni 12 min dalle due città, quindi ci vogliono:

$$\frac{70}{12}2 = \frac{35}{3} = 11.6666 = 12$$

23) Maria va spesso ad allenarsi: ogni volta corre per 6 min, poi cammina per 3 minuti. Ripete questa sequenza 4 volte consecutive per poi finire l'allenamento con altri 6 minuti di corsa. Solitamente Maria corre su un percorso lungo la riva di un fiume e, dopo 21 minuti, torna indietro esattamente a metà dell'allenamento. Maria si prefigge il seguente obiettivo: 1 km in 7 min e 30 s quando corre e 1 km in 12 min quando cammina.
A metà dell'allenamento, se raggiunge il suo obiettivo, quanti km ha percorso Maria?
a) 1.0 b) 2.0 c) 2.5 d) 4.0 e) 5.0

Soluzione: possiamo decomporre i 21 min di metà allenamento come 21 = 6 + 3 + 6 + 3 + 3 di cui il primo, terzo e quinto addendo danno i minuti di corsa = 15 min, il secondo e il quarto addendo 6 min camminando. Quindi basta impostare due proporzioni:

$$\text{corsa) } 1\,km : 7.5\,min = x_1 : 15\,min \Rightarrow \frac{1}{\frac{15}{2}} = \frac{x_1}{15} \Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{x_1}{15} \quad \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\text{cammino) } 1\,km : 12\,min = x_2 : 6\,min \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{x_2}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

e quindi Maria ha percorso 2+0.5 = 2.5 km

24) Calcolare il valore della seguente frazione:

$$\frac{127^2 - 73^2}{2}$$

a) 1458 b) 5400 c) 10000 d) 10800 e) 20000

Soluzione: approfittiamo del fatto che il numeratore è un prodotto notevole:

$$\frac{127^2-73^2}{2}=\frac{(127+73)(127-73)}{2}=\frac{200\cdot 54}{2}=100\cdot 54=5400$$

25) Semplificare la seguente espressione $(4x)^{-2}\sqrt{16x^6}$ con $x>0$

a) x^2 b) x c) $64\,x$ d) $\frac{x^2}{4}$ e) $\frac{x}{4}$

Soluzione:

$$(4x)^{-2}\sqrt{16x^6}=\frac{1}{4^2x^2}(4^2x^6)^{\frac{1}{2}}=\frac{4x^3}{4^2x^2}=\frac{x}{4}$$

26) Si consideri un triangolo isoscele con l'ipotenusa di lunghezza *h* cm e area *S* cm^2,
Quale tra le seguenti esprime la corretta relazione tra h *ed* S*?*

a) $h=2\sqrt{S}$ b) $h=2\sqrt{2}+S$ c) $h=\frac{\sqrt{S}}{2}$ d) $h=\sqrt{2S}$ e) c) $h=\sqrt{\frac{S}{2}}$

Soluzione: Poiché il triangolo rettangolo è isoscele i due cateti sono uguali e pari ad *a* ne segue che:

$$S=\frac{a^2}{2}\Rightarrow a^2=2S; h^2=a^2+a^2=2a^2\Rightarrow h^2=4S\Rightarrow h=2\sqrt{S}$$

27) Tre amici ricevono complessivamente euro 36 da suddividere tra di loro nelle seguenti proporzioni 2:3:7. *Qual è la differenza in euro tra l'ammontare più grande e quello più piccolo ricevuto dai tre amici?*

a) 15 b) 3 c) 6 d) 9 e) 12

Soluzione: 2:3:7 implica 2+3+7=12 che è il totale divisore della cifra da cui 36/12 = 3 e quindi l'amico che deve ricevere 2 contro 12 avrà 3 x 2 = 6 euro, quello che riceve 7 contro 12 avrà 3 x 7 = 21 euro da cui la differenza è 21 - 6 = 15 euro.

28) Nel tentativo di guadagnare qualcosa in più per andare in vacanza, Marco, Rita, Irene e Sara hanno svolto vari lavoretti per i loro vicini. Prima di iniziare hanno pattuito che tutti i soldi guadagnati sarebbero stati condivisi equamente tra loro. Marco ha guadagnato 10 euro, Rita 15 euro, Irene 12 euro, Sara ha guadagnato 35 euro e quindi deve dei soldi agli altri amici.
Quanto euro deve ricevere Rita da Sara?

a) 10 b) 9 c) 8 d) 6 e)3

Soluzione: Facciamo la media dei guadagni

$$\frac{10+15+12+35}{4}=\frac{72}{4}=18$$

Poiché sia Rita che Marco che Irene hanno guadagnato meno della media ognino di loro deve ricevere soldi da Sara, in particolare Rita deve ricevere 18 - 15 = 3 euro.

29) Una galleria d'arte deve ospita la mostra di J. S. All'ingresso un filmato di 11 minuti viene proiettato continuamente durante tutta la giornata, con un intervallo di 3 minuti tra una proiezione e l'altra. Le proiezioni iniziano alle 09:15 e terminano alle 18:00. La mattina, quando il filmato inizia ad essere proiettato, parte sempre dall'inizio.
Quante volte il filmato viene proiettato per intero nel corso di una giornata?

a) 37 b) 39 c) 35 d) 36 e) 38

Soluzione: dalle 09.15 alle 18.00 vi sono 8 h e 45 min ossia 8 x 60 + 45 = 480 + 45 = 525 min
Tra una proiezione e la successiva vi è una interruzione di 3 min, quindi per poter riprendere una nuova proiezione ci vogliono 11 + 3 = 14 min. quindi il numero di volte richiesto è pari a:

$$\frac{525}{14}=37.5 \text{ ossia } 37 \text{ volte}$$

30) Il fan club di un gruppo musicale mette in vendita tipologie diverse di poster tramite il proprio sito. I clienti possono scegliere i poster che desiderano ricevere. Sono disponibili sia poster grandi dell'intero gruppo che poster di formato ridotto di ciascun membro del gruppo. Il costo di ciascuna confezione comprende un prezzo fisso diverso per ogni tipo di poster. Le spese di spedizione sono le stesse per ogni tipologia di confezione e sono incluse nei prezzi di seguito riportati.

- Confezione mini: 3 poster grandi e 4 poster di formato ridotto $ 14
- Confezione media: 4 poster grandi e 3 poster di formato ridotto $ 16
- Confezione maxi: 5 poster grandi e 3 poster di formato ridotto $ 19

Calcolare il costo delle spese di spedizione.

a) $ 5 b) $ 4 c) $ 3 d) $ 2 e) $ 1

Soluzione: si risolve impostando un sistema lineare. Se chiamiamo *g* il costo dei poster grandi, *p* il costo dei poster piccoli ed *s* le spese fisse di spedizione si ha che:

$$\begin{cases} 3g+4p+s=14 \\ 4g+3p+s=16 \\ 5g+3p+s=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3g+4p+s=14 \\ 4g+3p+s=16 \\ s=19-5g-3p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3g+4p+19-5g-3p=14 \\ 4g+3p+19-5g-3p=16 \\ s=19-5g-3p \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2g+p=-5 \\ -g=-3 \\ s=19-5g-3p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2g+p=-5 \\ g=3 \\ s=19-5g-3p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6+p=-5 \\ g=3 \\ s=19-15-3p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6+p=-5 \\ g=3 \\ s=19-15-3p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=1 \\ g=3 \\ s=1 \end{cases}$$

da cui le spese di spedizione valgono 1 $

31) Per raggiungere il suo ufficio, Davide può percorrere due strade diverse. La prima strada di 6 Km lungo la quale si incontrano 3 semafori, che costringono Davide a fermarsi al rosso a ciascun semaforo per tre minuti in media. La seconda strada di 8 km, lungo la quale si incontra solo un semaforo che costringe Davide a fermarsi per due minuti in media.

Quando Davide non è fermo ad un semaforo, guida ad una velocità media di 24 Km/h. *Quanto tempo risparmia in media Davide percorrendo la strada più veloce?*

a) 1 min b) 2 min c) 4 min d) 5 min e) 7 min

Soluzione: I minuti di ognuno dei tragitti è dato dalla somma dei minuti di percorso (dati da velocità media diviso distanza) e dei minuti di attesa (tempo medio di attesa per numero di semafori), da cui

$$t_1 = \frac{6\ Km}{24\frac{km}{h}} + 3 \cdot 3\ min = \frac{1}{4}h + 9\ min = 15 + 9\ min = 24\ min$$

$$t_2 = \frac{8\ Km}{24\frac{km}{h}} + 1 \cdot 2\ min = \frac{1}{3}h + 2\ min = 20 + 2\ min = 22\ min$$

e quindi il tragitto più veloce fa risparmiare 2 min.

32) Giovanni ha acquistato una nuova automobile con la quale ha percorso 15000 km il primo anno. Al momento dell'acquisto, l'automobile era dotata di quattro gomme più una di scorta. Ogni 3000 km Giovanni ha effettuato la rotazione di tutte le gomme, inclusa quella di scorta, di modo che tutte le gomme si consumassero in maniera uniforme. Tuttavia, dopo aver percorso 5000 km, una delle gomme risultava difettosa ed è stato necessario sostituirla; la sostituzione è stata effettuata mettendo una gomma nuova nella stessa ruota. In seguito, Giovanni ha continuato la rotazione di tutte le gomme come di norma dopo la rotazione effettuata a 6000 km.

Alla fine dell'anno, quanti km ha percorso ciascuna delle 4 ruote originariamente in dotazione?

a) 12000 b) 15000 c) 10000 d) 3000 e) 2500

Soluzione: In totale vi sono state 15000/3000 = 5 rotazioni in un anno. Delle 4 ruote originali ognuna ha fatto 4 rotazioni in marcia ed 1 come ruota di scorta, da cui 4 x 3000 = 12000 km.

33) I cateti di un triangolo rettangolo misurano rispettivamente $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ e $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.
Quanto misura l'ipotenusa?

a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) 4 d) $\sqrt{16+2\sqrt{12}}$ e) 16

Soluzione: per Pitagora $i=\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6+2-2\sqrt{12}+6+2+2\sqrt{12}}=\sqrt{16}=4$

34) Semplificare la seguente espressione:

$$\frac{x}{x+2}-\frac{x-2}{x}$$

a) $\frac{4}{x(x+2)}$ b) $\frac{x-2}{x+2}$ c) $\frac{-4}{x(x+2)}$ d) $\frac{2x^2-4}{x(x+2)}$ e) $\frac{4}{x+2}$

Soluzione:

$$\frac{x}{x+2}-\frac{x-2}{x}=\frac{x^2-x^2+4}{x(x+2)}=\frac{4}{x(x+2)}$$

35) Data la funzione $f(x)=3x-6$, quale delle seguenti risposte rappresenta la sua funzione inversa?
a) $f^{-1}(x)=\frac{x}{3}+2$ b) $f^{-1}(x)=\frac{x}{3}+6$ c) $f^{-1}(x)=\frac{x}{3}-2$ d) $f^{-1}(x)=\frac{x}{3}-6$ e) $f^{-1}(x)=2-\frac{x}{3}$

Soluzione: $y=3x-6\Rightarrow 3x=y+6\Rightarrow x=\frac{y}{3}+2\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{3}+2$

36) Alan lancia contemporaneamente due dadi non truccati con le facce numerate da 1 a 6.
Qual è la probabilità che esca lo stesso numero su entrambi i dadi?

a) 1/6 b) 1/3 c) 1/36 d) 1/2 e) 1/18

Soluzione: La faccia *a* di un dado ha probabilità 1/6 di essere estratta. Poiché le estrazioni della faccia *a* per ogni singolo dado sono eventi indipendenti la probabilità totale è il prodotto delle probabilità, da cui

$$p_a=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

Ma siccome non importa quale sia la coppia di facce, l'importante è che siano eguali la probabilità di estrarre la stessa faccia è:

$$p=6\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$$