Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

02 - Logica delle dimostrazioni

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, D. Provenzano, A. Consiglio

1. Introduzione

I *teoremi* sono implicazioni logiche tra un'ipotesi e una tesi, che possono essere dimostrate utilizzando postulati o altri teoremi. In essi distinguiamo:

- l'*enunciato*: esprime il contenuto dell'implicazione logica da dimostrare;
- l'*ipotesi*: ciò che si suppone vero;
- la *tesi*: ciò che si deve dimostrare;
- la *dimostrazione*: sequenza di deduzioni, osservazioni, calcoli che, partendo dall'ipotesi, porta ad affermare la verità della tesi.

A titolo di esempio si consideri il seguente teorema

Teorema (esempio). *Sia $a \in \mathbb{N}$ un numero pari allora la divisione intera di a rispetto al valore 2 ha resto 0.*

Dimostrazione. Poichè a è un intero positivo pari allora è esprimibile come $a = 2 \cdot n$, con $n \in \mathbb{N}$. Dividendo a per il valore 2 si ottiene

$$\frac{a}{2} = \frac{2n}{2} = n$$

ossia la divisione intera con il valore 2 ha resto 0. $\square$

In esso "*Sia $a \in \mathbb{N}$ un numero pari allora la divisione intera di a rispetto al valore 2 ha resto 0*" è l'enunciato, distinguendo fra l'ipotesi "*Sia $a \in \mathbb{N}$ un numero pari*" e la tesi "*la divisione intera di a rispetto al valore 2 ha resto 0*". Segue ovviamente la dimostrazione che viene fatta terminare con il simbolo "$\square$" indicante la fine della dimostrazione.

L'enunciato di un teorema è costituito da *nomi* (nel teorema di prima a, *numero pari*, *divisione intera*, etc.) e *verbi* (*ha resto*), che in logica prendono il nome di *argomenti* e *predicati*, rispettivamente. Quando l'argomento di un enunciato non è specificato si dice che esso è una *variabile* (nel teorema di esempio a è una variabile). Una espressione del tipo "x è pari" non è un enunciato in quanto, non conoscendo x, non possiamo concludere che l'espressione sia vera o falsa. L'espressione di un enunciato diventa predicato quando le variabili sono sostituite da costanti. I valori che le variabili possono assumere devono appartenere ad uno specifico *dominio* (nel teorema visto a viene indicato come elemento dell'insieme dei numeri naturali e quindi come numero intero per il quale ha senso parlare di numero *pari*). Gli elementi del dominio che rendono vero il predicato costituiscono l'*insieme di verità*. Per esempio, se il dominio del predicato è l'insieme dei numeri naturali, l'insieme di verità del predicato "*x è maggiore di 10*" è

$$V_A = \{x \in \mathbb{N} : x > 10\}$$

Supponiamo di associare il simbolismo $P(x)$ al predicato che identifica le ipotesi, mentre associamo $Q(x)$ al predicato che identifica la tesi:

dire che se $P(x)$ è vera allora anche $Q(x)$ è vera ossia

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

viene chiamata *implicazione*. Un modo altrettanto utile di rappresentare ipotesi e tesi è quello insiemistico ed in tal senso la stessa implicazione di prima si può esplicitare con

$$P(x) \subseteq Q(x)$$

Esempio 1.1
Si considerino i seguenti predicati:
$P(x) =$ "x è un siciliano" e $Q(x) =$ "x è un italiano".
Se il dominio di $P(x)$ e $Q(x)$ è l'insieme dei cittadini europei, si può concludere che $P(x) \subset Q(x)$, ossia, l'insieme di verità di $P(x)$ è contenuto in $Q(x)$, quindi $P(x) \Rightarrow Q(x)$ ovvero "x è un siciliano" implica che "x è un italiano".

Se $P(x)$ è l'ipotesi, tramite l'*implicazione logica* "$\Rightarrow$" si è dimostrata la tesi $Q(x)$. Se $P(x) \Rightarrow Q(x)$, si può utilizzare una delle seguenti locuzioni:

- se $P(x)$ è vera, allora $Q(x)$ è vera;
- se $P(x)$, allora $Q(x)$;
- $P(x)$ è condizione sufficiente per $Q(x)$;
- $Q(x)$ è condizione necessaria per $P(x)$.

Si osservi che se $P(x) \Rightarrow Q(x)$ non è detto sia vero il viceversa $Q(x) \Rightarrow P(x)$. Ciò è evidente se si considera che l'implicazione logica è equivalente all'inclusione fra insiemi: affinchè sia valida l'implicazione opposta, l'insieme di verità di $P(x)$ deve essere eguale all'insieme di verità di $Q(x)$. In tal caso si dice che $P(x)$ è una condizione *necessaria e sufficiente* e si indica con il simbolo "$\Leftrightarrow$":

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

Nell'esempio 1, $P(x)$ è una condizione soltanto sufficiente, non necessaria.
Se $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, si può usare anche una delle seguenti locuzioni:

- $P(x)$ è vera se e soltanto se è vera $Q(x)$;
- se $P(x)$ è vera, allora $Q(x)$ è vera e viceversa;
- se $P(x)$ allora $Q(x)$ e viceversa;
- $P(x)$ è condizione necessaria e sufficiente per $Q(x)$.

2. Tipi di dimostrazione

2.1. Dimostrazione diretta. Il metodo di dimostrazione visto nell'introduzione è noto anche come *prova* o *dimostrazione diretta*. Tale approccio consiste nell'assumere $P(x)$ come vero (ipotesi) e dedurre direttamente la verità di $Q(x)$ (tesi).

2.2. Dimostrazione per contronominale (indicata a volte anche come dimostrazione per assurdo). Un altro metodo di dimostrazione consiste nel negare la tesi e mostrare che essa implica la negazione dell'ipotesi. Da un punto di vista insiemistico si considerano gli insiemi complementari $Q^c(x)$ e $P^c(x)$ e si dimostra che $Q^c(x) \Rightarrow P^c(x)$. Infatti, sempre da un punto di vista insiemistico, la relazione $P(x) \subseteq Q(x) \Leftrightarrow Q^c(x) \subseteq P^c(x)$. Da un punto di vista logico, $Q^c(x)$ è equivalente alla negazione della tesi, e si indica con $\neg Q(x)$, mentre $P^c(x)$ equivale a negare l'ipotesi, e si usa la notazione $\neg P(x)$.

Nell'esempio 1, negare la tesi significa considerare l'espressione $\neg Q(x) =$ "*x non è italiano*". La negazione di $P(x)$ è invece l'espressione "*x non è siciliano*". Pertanto è logico dedurre che

$$\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$$

ossia,

$$x \textit{ non è italiano} \Rightarrow x \textit{ non è siciliano}$$

Si osservi che, l'ultima affermazione è equivalente a

$$x \textit{ è siciliano} \Rightarrow x \textit{ è italiano}$$

ossia,

$$[\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)] \Leftrightarrow [P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

2.3. Dimostrazione per assurdo (indicata a volte anche come dimostrazione indiretta). Un metodo alternativo di procedere nella dimostrazione consiste nel negare la tesi, $\neg Q(x)$, assumendo al contempo come vera l'ipotesi $P(x)$ (che è il ruolo proprio delle ipotesi) e mostrare che la coesistenza di $\neg Q(x)$ e $P(x)$ implica un assurdo matematico. Per esempio si potrebbe dimostrare che $\{\neg Q(x), P(x)\} \Rightarrow \neg P(x)$. Questo è un assurdo, nell'ambito della logica non contraddittoria, poiché $P(x)$ risulterebbe contemporaneamente vera e falsa. Questo implica che $P(x)$ e $\neg Q(x)$ non possono essere entrambe vere contemporaneamente e, quindi, se $P(x)$ (l'ipotesi) è verificata allora dovrà essere falsa $\neg Q(x)$, o che è lo stesso, $Q(x)$ dovrà essere vera. Infatti

$$\neg(\neg Q(x)) = Q(x).$$

Il punto chiave di una dimostrazione per assurdo consiste nel mostrare che ipotesi e tesi negata NON possono essere contemporaneamente vere. Ad esempio, si potrebbe dimostrare per assurdo che $P(x) \Rightarrow Q(x)$ mostrando che $\{\neg Q(x), P(x)\} \Rightarrow 1 > 2$, che è un assurdo matematico legato all'ordinamento dei numeri naturali.

Esempio 2.1
Dimostrare il seguente teorema:
Non esiste alcun numero razionale tale che $x^2 = 2$.

Proviamo a ragionare per assurdo, negando la tesi e assumendo vera l'ipotesi ($\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$). Mostriamo che ciò conduce ad un assurdo matematico.
Se $x \in \mathbb{Q}$ allora, per definizione di numero razionale, esistono $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $x = \frac{m}{n}$. Risulta quindi:

$$x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2, \Leftrightarrow m^2 = 2\,n^2 \quad \text{con } m, n \in \mathbb{Z}$$

Come è noto, un numero intero può essere scomposto in fattori primi. In essi potrà essere presente il numero primo 2 oppure no. Nel nostro caso, se m, a primo membro, contiene il numero primo 2, questo comparirà con un esponente pari (a causa del quadrato). Se il numero primo 2 non fosse presente comparirebbe un numero di volte pari a 0. Nel secondo membro ($2\,n^2$) il numero 2 compare evidentemente un numero dispari di volte. Ma dato che primo e secondo membro devono essere eguali si arriva ad un assurdo, ossia si contraddice il fatto che un *numero intero abbia un'unica scomposizione in fattori primi*. Quindi, è falsa la negazione della tesi, ossia la tesi è vera.

2.4. Principio di induzione. Spesso nelle dimostrazioni si usa il principio di induzione:
Si assume di avere un insieme di proposizioni $P(n)$ dipendenti da $n \in \mathbb{N}$. Se:

- si verifica che la proposizione $P(1)$ è vera;
- supponendo che $P(n)$ sia vera, si dimostra che è vera la proposizione $P(n+1)$;

allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in N$, $n \geq 1$.
Vediamo alcuni esempi di applicazione del principio di induzione.

Esempio 2.2
Dimostrare per induzione: Sia A un insieme finito, allora la cardinalità dell'insieme delle parti di A è $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. Per $n = 0$, abbiamo che $A = \varnothing$ e $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$, quindi:

$P(0)$**:** $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\} \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^0 = 1$, quindi $P(0)$ è vera.

$P(n-1)$**:** Assumiamo che la proposizione sia vera per $n-1$, ovvero che se $|A| = n-1$ allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^{n-1}$ e mostriamo che la proposizione $P(n)$ è vera per n.
Essendo $n > 0$, $|A| = n > 0$, sicuramente $A \neq \varnothing$ e dovrà avere almeno un elemento. Si ipotizzi che tale elemento sia $\alpha \in A$. Qualunque sottoinsieme di A può contenere o non contenere l'elemento α:

i: se i sottoinsiemi di A non contengono α, essi sono sottoinsiemi di $A\backslash\{\alpha\}$ e poichè $|A\backslash\{\alpha\}| = n-1$, per l'ipotesi induttiva essi sono 2^{n-1};

ii: se i sottoinsiemi di A contengono α, essi sono sottoinsiemi del tipo $X \cup \{\alpha\}$, con X sottoinsieme di $A\backslash\{\alpha\}$. Questi ultimi sono per ipotesi 2^{n-1}.

Pertanto, i sottoinsiemi di A sono:
$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

Esempio 2.3
Si dimostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, si ha:

$$P(n): \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

ossia, la somma dei primi n numeri naturali (positivi) è pari al semiprodotto di n con il suo successore.
$P(1)$: per $n = 1$, la proposizione è vera, in quanto si ha

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

$P(n)$: ipotizziamo sia vera per n ossia

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

e dimostriamo che è vera $P(n+1)$.
Il nostro obiettivo è quindi dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \tag{1}$$

Sostituendo l'ipotesi induttiva $P(n)$ nella 1, si ha

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Esempio 2.4
Dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli: per ogni intero $n \geq 0$ e

ogni numero reale $x \geq -1$ si ha che

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$P(1)$: è vera in quanto $(1+x)^1 \geq 1+x$.
$P(n)$: assumiamo vera l'ipotesi che $(1+x)^n \geq 1+nx$
$P(n+1)$: dobbiamo dimostrare che $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$
Poichè è vera per ipotesi la $P(n)$ moltiplichiamo ambo i suoi membri per $(1+x)$. Avremo che

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$ dato che $nx^2 \geq 0$; dunque $P(n+1)$ è vera.

Esercizio 2.1
Lo studente dimostri per induzione che $2^n > n^2$ per ogni intero maggiore o eguale a 5. A tal fine può sfruttare sempre dimostrandolo per induzione che $n^2 > 2n+1$ per ogni $n \geq 3$.