Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

03 - I Numeri Reali

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, D. Provenzano, A. Consiglio

1. Introduzione

I numeri razionali, ossia quei numeri definiti come $a = \dfrac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, non sempre sono sufficienti a rappresentare il risultato di alcune operazioni. Tale limitatezza é chiaramente espressa nel seguente esempio:

Esempio 1.1
Non esiste alcun numero razionale tale che $x^2 = 2$.

Infatti, supponiamo per assurdo che esista un numero razionale $a \in \mathbb{Q}$ tale che $a^2 = 2$. Per definizione di numero razionale, esistono $p, q \in \mathbb{Z}$ tali che $a = \frac{p}{q}$. Sostituendo questo risultato in $a^2 = 2$ otteniamo:

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \iff p^2 = 2\,q^2.$$

Supponiamo dapprima che il numero intero p sia dispari. In questo caso anche p^2 è dispari, il che e' assurdo, visto che, secondo l'equazione precedente, $p^2 = 2\,q^2$ e quindi p^2 deve essere pari. Consideriamo ora il caso in cui p sia un numero pari. In questo caso p^2 dovrà dunque essere divisibile per una potenza pari di 2. D'altro canto, sia che q sia un numero pari, sia che q sia un numero dispari, il numero q^2 risulta divisibile per una potenza pari di 2 (incluso lo zero), ossia, q^2 sarà divisibile per almeno una delle seguenti potenze (pari) di due: $\{2^0, 2^2, 2^4, ..., 2^{2n}, ...\}$. Quindi $p^2 = 2\,q^2$ dovrà essere divisibile per una potenza dispari di 2: $\{2^1, 2^3, 2^5, ..., 2^{2n+1}, ...\}$, che è assurdo avendo supposto p pari.

Occorre pertanto definire una ulteriore proprietà dell'insieme dei numeri reali che permette di ottenere l'operazione di estrazione di radice. Tale proprietà si chiama *Assioma di Dedekind*. L'assioma di Dedekind assicura che, nel campo dei reali, esiste un numero reale positivo il cui quadrato è 2.
I numeri che non si possono ottenere tramite una frazione del tipo $\dfrac{p}{q}$, sono detti *numeri irrazionali*. Per esempio, $\sqrt{2}$, e e π sono numeri irrazionali.

L'unione dei razionali e degli irrazionali definisce l'insieme dei numeri reali. Tali numeri rappresentano lo strumento principale per gli studi che affronteremo. Introdurremo i numeri reali in modo assiomatico senza eccedere, comunque, nel formalismo.
Dal punto di vista geometrico, l'insieme dei numeri reali può essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta orientata.

Teorema 1.1. *L'insieme dei numeri reali non è numerabile.*

Questo famoso teorema, che non dimostreremo, definisce insiemi numerici infiniti che, però, non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Tali insiemi hanno la *potenza del continuo*.

1.1. La struttura algebrica di $\mathbb{R}$. Dato un insieme A non vuoto, si definisce *operazione binaria* su A una legge che associa a ogni coppia ordinata di elementi di A uno ed un solo elemento di A. Quindi, tramite le operazioni binarie a ogni coppia ordinata $(a, b) \in A$ corrisponde l'elemento $c \in A$.
Nell'insieme dei numeri reali, che sarà indicato con $\mathbb{R}$, sono definite due operazioni: l'*addizione* indicata con il segno "+" e la *moltiplicazione* indicata con il segno "·". Le due operazione soddisfano le seguenti proprietà:

(1) *Proprietà commutativa dell'addizione e della moltiplicazione*

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

(2) *Proprietà associativa dell'addizione e della moltiplicazione*

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

(3) *Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma*

$$(a + b) \cdot c = ac + bc \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

(4) *Esistenza degli elementi neutri*

$$a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ (elemento neutro dell'addizione)}$$

$$a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \text{(elemento neutro della moltiplicazione)}$$

(5) *Esistenza degli opposti e dei reciproci*

$$a + (-a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (-a \text{ è l'opposto di } a)$$

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (a^{-1} \text{ è il reciproco di } a)$$

Le proprietà (1) - (5) possono essere considerate per determinare altre proprietà dei numeri reali, utili soprattutto per il calcolo delle frazioni.

1.2. La struttura d'ordine di $\mathbb{R}$. L'insieme dei numeri reali è un *insieme ordinato* (*o totalmente ordinato*) rispetto alla relazione d'ordine $<$. Tale relazione gode delle seguenti proprietà:

i: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, vale una sola delle seguenti relazioni

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

ii: $\forall c \in \mathbb{R}$, se $a < b$ e $b < c$, allora $a < c$
iii: Se $0 < a$ e $0 < b$, allora $0 < ab$

Questa struttura d'ordine é inoltre compatibile con la struttura algebrica, dato che valgono le leggi di monotonia della somma e del prodotto:

iv: Se $a < b$, allora $\forall c \in \mathbb{R}$, $a + c < b + c$

v: Se $a < b$, allora $\forall c \in \mathbb{R}_+$[1], $a \cdot c < b \cdot c$

Talvolta si usa anche la relazione $a \leq b$.
Utilizzando le proprietà della somma e prodotto di due numeri reali e la relazione d'ordine è possibile dimostrare che

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, particolarmente utili per rappresentare la totalitá di numeri reali compresi tra a e b sono le scritture che definiscono i seguenti quattro insiemi numerici limitati detti *intervalli*:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

dove a e b prendono il nome di estremi dell'intervallo.
Le parentesi quadre chiuse stanno ad indicare che l'estremo in questione appartiene all'intervallo; quelle quadre aperte (ovvero le parentesi tonde) esprimono invece la non appartenenza dell'estremo all'intervallo medesimo.

1.3. Massimi, minimi e estremi di un insieme. Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ si chiama *insieme numerico*.
Sia A un insieme numerico.
Diremo che $M \in A$ è il *massimo* dell'insieme A se $\forall a \in A$ si ha che $M \geq a$. In modo analogo si definisce $m \in A$ il *minimo* dell'insieme A se $\forall a \in A$ si verifica che $m \leq a$.
Diremo che $\alpha \in \mathbb{R}$, se esiste, é un *maggiorante* (*minorante*) dell'insieme A se $a \leq \alpha$ $(a \geq \alpha)$, $\forall a \in A$.
È evidente che se esiste un α maggiorante (minorante) di un insieme A, qualsiasi altro $\beta \in \mathbb{R} > \alpha$ $(\beta < \alpha)$ è un maggiorante (minorante) di A. Chiameremo quindi maggioranti (minoranti) di $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a, \forall a \in A\}$ $(\{x \in \mathbb{R} : x \leq a, \forall a \in A\})$.
Il più piccolo dei maggioranti prende il nome di *estremo superiore* e si indica con $\sup A$. Analogamente, il più grande dei minoranti prende il nome di *estremo inferiore* e si indica con $\inf A$.
Diremo che A è *limitato superiormente* (*inferiormente*) se ammette estremo superiore (estremo inferiore). Un insieme A che ammette estremo superiore ed estremo inferiore si dice *limitato*.
In modo rigoroso, l'estremo superiore ed l'estremo inferiore di un insieme numerico A si possono definire nel seguente modo:

Definizione Sia $A \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ è $\sup A$ se valgono le seguenti proprietà:

- $\alpha \geq a$, $\forall a \in A$ (cioé α é un maggiorante dell'insieme A)

[1] R_+ = reali positivi

- $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, a \in A$ tale che $\alpha - \epsilon < a \leq \alpha$ (cioé α é il piú piccolo dei maggioranti di A)

In maniera analoga si può definire $\inf A$

Definizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$ è $\inf A$ se valgono le seguenti proprietà:

- $\delta \leq a$, $\forall a \in A$ (cioé δ é un minorante dell'insieme A)
- $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, a \in A$ tale che $\delta \leq a < \delta + \epsilon$ (cioé δ é il piú grande dei maggioranti di A)

Esempio 1.2
Sia
$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$
L'insieme A è limitato superiormente ($\sup A = 1$) ed inferiormente ($\inf A = 0$). Inoltre, $\sup A = \max A = 1$.

Esempio 1.3
Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 10\} \cup \{12\}$ e $B = \left\{ \dfrac{5n-1}{7n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
L'insieme A è limitato superiormente ($\sup A = 12$) ed inferiormente ($\inf A = 2$). Inoltre, $\sup A = \max A = 12$.
L'insieme B è limitato inferiormente ($\inf B = \dfrac{4}{9}$) e superiormente ($\sup B = \dfrac{5}{7}$). Si osservi che $\inf B = \min B = \dfrac{4}{9}$, infatti per $n = 1$ si ottiene il valore di $\dfrac{4}{9} \in B$. Lo stesso non si può dire di $\sup B$. In effetti, è necessaria una definizione più rigorosa per stabilire che $\sup B = \dfrac{5}{7}$.

Per l'insieme B dell'esempio precedente, si ha che

$$\frac{5n-1}{7n+2} > \frac{5}{7} - \epsilon \Rightarrow \epsilon > \frac{5}{7} - \frac{5n-1}{7n+2} \Rightarrow n > \frac{17 - 14\epsilon}{49\epsilon}$$

tale che sia verificata la seconda proprietà della definizione di estremo superiore. Infatti già per $\epsilon = 1$ basta fissare $\bar{n} \geq 1 > \dfrac{3}{49}$. Se fissiamo $\epsilon = 0.0001$ la condizione è verificata a partire da $\hat{n} \geq 3470$.

1.4. Il sistema ampliato dei numeri reali. Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto la nozione di estremo superiore (inferiore) per un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$, non vuoto, limitato superiormente (inferiormente). Tale definizione puó essere estesa ad un insieme A illimitato, se ci si pone nel cosiddetto *sistema ampliato di numeri reali*, che verrá indicato con $\tilde{\mathbb{R}}$. Con tale espressione s'intende l'insieme dei numeri reali ampliato con l'aggiunta dei simboli $-\infty$ e ∞, nel quale é definito

un ordinamento e un (parziale) formalismo algebrico. L'insieme dei numeri reali non ha un limite superiore (come $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$) e un limite inferiore (come $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$). Per tale motivo è conveniente aggiungere a $\mathbb{R}$ due punti: $+\infty$ (che semplicemente denoteremo con ∞) e $-\infty$, e definire la relazione d'ordine fra un qualsiasi reale e i cosiddetti *punti all'infinito.*
Per quanto riguarda i nuovi simboli $-\infty$ e ∞ si suppone che essi siamo, rispettivamente, minore e maggiore di qualsiasi numero reale:

$$-\infty \leq x \leq \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Affinché nel nuovo sistema numerico siamo possibili le operazioni algebriche precedentemente descritte, anche quando vengono coinvolti i simboli ∞ e $-\infty$, si conviene quanto segue:

a: se $a \in \mathbb{R}$, allora

$$a + \infty = \infty + a = \infty$$

$$a - \infty = -\infty + a = -\infty$$

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$$ [2]

b: se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$$

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$$

c: se $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$$

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$$

d:

$$\infty + \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$

$$-\infty - \infty = \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$

Non è possibile assegnare alcun valore aritmetico alle seguenti forme:

$$+\infty - \infty; \;\; 0 \cdot \infty; \;\; \frac{0}{0}; \;\; \frac{\infty}{\infty}; \;\; 1^{\infty}; \;\; 0^0; \;\; \infty^0$$

Nel sistema ampliato dei numeri reali, la definizione di estremo superiore si estende ponendo, nel caso dell'insieme A illimitato superiormente:

$$\sup A = +\infty$$

Analogamente, se A é illimitato inferiormente:

$$\inf A = -\infty$$

[2] Quando studieremo i limiti vedremo che, dipendentemente dal segno di a, si parlerà di 0^+ o 0^- in base alla concordanza o discordanza dei segni fra numeratore e denominatore per sottolineare che il processo di convergenza a zero avviene dalla destra o dalla sinistra di 0, rispettivamente.

Utilizzando la definizione di estremo superiore e inferiore di un insieme, nel caso degli intervalli avremo che

Intervalli chiusi non limitati	$[a, \infty)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
	$(-\infty, a]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
Intervalli aperti non limitati	(a, ∞)	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
	$(-\infty, a)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

2. Il valore assoluto

Dato $x \in \mathbb{R}$, si definisce il *valore assoluto* di x (in simboli $|x|$) nel seguente modo:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

oppure

$$|x| = \max(-x, x)$$

Dalla definizione di $|x|$ si deducono immediatamente le seguenti proprietà:

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |-x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ oppure $x = -a$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall a \in \mathbb{R}_+$
- $|x| \leq a \ \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall a \in \mathbb{R}_+$
- $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Esempio 2.1

$$|4| = 4,\ |-5| = 5,\ |x^2| = x^2$$

Il valore assoluto soddisfa inoltre le seguenti proprietà, la cui dimostrazione è meno ovvia delle precedenti, ma che risultano fondamentali da un punto di vista applicativo:

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$ se $y \neq 0$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Disuguaglianza triangolare)
- $|y - x| < r$ con $r \in \mathbb{R}$ maggiore di zero $\Longleftrightarrow x - r < y < x + r$.

L'ultima di queste proprietà e' particolarmente importante per il concetto di *intorno* che discuteremo nella prossima sezione.

3. Il concetto di intorno di un numero reale

Definizione Si definisce *intorno* di un punto $x \in \mathbb{R}$ un qualunque intervallo aperto che contiene il punto x.

Dato un numero reale $x \in \mathbb{R}$, il seguente insieme:

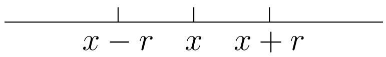
$$I_r(x) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < r\}$$

definisce un intorno di semiampiezza (o raggio) $r \in \mathbb{R}$, o r-intorno, del punto x.
Si osservi che la disequazione con il valore assoluto può essere scritta

$$\begin{cases} y - x < r & \text{se} \quad y - x \geq 0 \\ -(y - x) < r & \text{se} \quad y - x < 0 \end{cases}$$

da cui, $y < x + r$ e $y > x - r$, quindi

$$I_r(x) = \{y \in \mathbb{R} : x - r < y < x + r\} = (x - r, x + r)$$

Graficamente, 

L'espresione *intorno destro* (*intorno sinistro*) del punto x verrá riferta agli intervalli del tipo: $[x, x + r[$ (oppure $]x - r, x]$); indicheremo tali intorni, rispettivamente con, $I_+(x)$ e $I_-(x)$. Ogni intorno di un numero reale x puó essere pensato come l'unione di un intorno destro e di un intorno sinistro:

$$I_-(x) \cup I_+(x) = I(x)$$

Chiameremo infine intorno di $+\infty$ (o di $-\infty$) ogni intervallo del tipo $(a, +\infty)$ $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$; tale intorno verrá indicato con $I(+\infty)$ $(I(-\infty))$.

Teorema 3.1. *Dato $x \in \mathbb{R}$, l'unione di un numero finito o infinito di intorni di x é ancora un intorno di x.*

Teorema 3.2. *Dato $x \in \mathbb{R}$, l'intersezione di un numero finito di intorni di x é ancora un intorno di x.*

Teorema 3.3. *Dato $x \in \mathbb{R}$, l'intersezione di un numero infinito di intorni di x non necessariamente é un intorno di x.*

4. Il concetto di punto d'accumulazione e di punto interno

Definizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, un punto $x \in \mathbb{R}$ si dice *punto di accumulazione* per A se $\forall r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, l'intorno $I_r(x)$ contiene infiniti elementi di A.

Ne segue che un insieme finito non puó avere alcun punto di accumulazione e si osservi che non è necessario che un punto di accumulazione di A appartenga ad A.
Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, diremo che $(-\infty) + \infty$ é punto di accumulazione di A se $(\forall I(-\infty))$ $\forall I(+\infty)$, ad esso appartengono infiniti elementi di A.
$A \subseteq \mathbb{R}$ illimitato superiormente (inferiormente) ha come punto d'accumulazione $+\infty$ $(-\infty)$.

Esempio 4.1
Sia $A =]-1, 3]$. L'insieme dei punti di accumulazione per A è dato da $[-1, 3]$.

TEOREMA 4.1. *(di Bolzano-Weierstrass) Ogni insieme infinito e limitato ammette almeno un punto d'accumulazione.*

Definizione Un insieme A si dice *chiuso* se contiene tutti i suoi (eventuali) punti di accumulazione.

Definizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, un punto $x \in \mathbb{R}$ si dice *punto interno* ad A se $\exists r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tale che $I_r(x) \subseteq A$.

In altre parole, un punto $x \in \mathbb{R}$ si dice *punto interno* ad $A \subseteq \mathbb{R}$ se appartiene ad A e inoltre esiste almeno un suo intorno tutto composto da elementi di A.
I punti d'accumulazione di A non necessariamente sono punti interni di A.

Definizione Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto *aperto* se tutti i suoi punti sono interni ad A.

Da questa definizione si deduce che se A è aperto (contiene tutti i suoi punti interni) allora A^c è chiuso e viceversa.
L'insieme dei reali $\mathbb{R}$ è aperto, in quanto ogni suo punto é punto interno (tutti i punti di $\mathbb{R}$ sono interni). Come conseguenza l'insieme vuoto è chiuso, infatti, il complementare di $\mathbb{R}$ è $\varnothing$. A sua volta, $\varnothing$ è un insieme aperto in quanto esso non contiene punti e, a fortiori, non può contenere i suoi punti di accumulazione. Ne consegue che, il complementare di $\varnothing$, che è $\mathbb{R}$, è chiuso.
$\mathbb{R}$ e $\varnothing$ sono gli unici insiemi aperti e chiusi allo stesso tempo.

Esempio 4.2
Sia $A = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ un insieme chiuso. L'insieme complementare, A^c, è dato da:

$$A^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

quindi il complementare di A è dato dall'unione di due insiemi aperti, ossia, A^c è aperto e pertanto A è un insieme chiuso.

Esempio 4.3
L'insieme $\mathbb{N}$ non ha punti di accumulazione e quindi l'insieme composto dai suoi punti d'accumulazione é vuoto. Poiché l'insieme vuoto é sottoinsieme improprio di ogni insieme, allora $\mathbb{N}$ é un insieme chiuso.

Teorema 4.2. *L'unione di una famiglia finita o infinita di insiemi aperti è un insieme aperto.*

Teorema 4.3. *L'intersezione di una famiglia finita di insiemi aperti è un insieme aperto.*

Teorema 4.4. *L'intersezione di una famiglia infinita di insiemi aperti non necessariamente è un insieme aperto.*

5. Esercizi di riepilogo

1. *Si consideri l'insieme* $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : x = \sqrt{\frac{2n+1}{3n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}\} \cup \{1/3, 0\}$. *Mostrare che l'insieme* A *è limitato e indicarne l'estremo superiore e inferiore. L'insieme* A *ammette massimo e/o minimo?*

2. *Si risolva la disequazione* $x^2 \geq |x|$.

3. *Si scriva in forma esplicita l'intorno del punto* $x_0 = -2$ *di ampiezza* $r = 3$ *e se ne tracci un grafico sull'asse reale.*

4. *Si consideri l'insieme* $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-7}{3n+1}, \forall n \in \mathbb{N}\} \cup \{-5\}$. *Il punto* $x_0 = -5$ *è di accumulazione per* A*? Il medesimo punto è di accumulazione per l'insieme* A^C*, ossia per il complementare di* A *in* $\mathbb{R}$*? Motivare entrambe le risposte.*

5. *Si consideri l'insieme* $B = [-2, 2[\cap]1, 3]$. *L'insieme* B *è un insieme aperto, chiuso, aperto a destra, aperto a sinistra? Indicare i punti di accumulazione di* B *che non appartengono a* B.