Università degli Studi di Palermo

Scuola Politecnica

Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

04 - Numeri Complessi

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Pecorella, D. Provenzano e A. Consiglio

1. Introduzione

La soluzione di un'equazione di secondo grado

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

è data da

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a},$$

se $b^2 - 4\,a\,c \geq 0$ e $a \neq 0$. Consideriamo ora un caso in cui $b^2 - 4\,a\,c < 0$:

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

Formalmente possiamo scrivere la sua soluzione secondo la formula generale di un'equazione di secondo grado (data sopra) come:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}.$$

Giacché il quadrato di un numero reale e sempre positivo o nullo, $y^2 = c$ implica $c \geq 0\ \forall y \in \mathbb{R}$, nell'esempio specifico non può esistere un numero reale che elevato al quadrato sia uguale a -36. Pertanto l'equazione $x^2 - 4x + 13 = 0$ non ammette soluzioni nel campo dei numeri reali.

Vi sono comunque problemi reali che necessitano di risolvere un' equazione di secondo grado anche nel caso in cui il determinante sia negativo: $b^2 - 4\,a\,c < 0$. Per tanto si è ampliato l'insieme dei numeri reali con il fine di ottenere un insieme numerico che includesse le soluzioni di un'equazione di secondo grado anche nel caso di determinante negativo. Tale insieme prende il nome di **insieme dei numeri Complessi** e si indica con $\mathbb{C}$.

L'artificio che permette di ampliare il campo reali in modo da ottenere i numeri complessi si basa proprio sulla possibilità di estrarre la radice quadrata di un numero negativo. Il primo passo in tal senso consiste nel definire una quantità i, detta *unità immaginaria*, tale che

$$i^2 = -1.$$

Se si estende il campo $\mathbb{R}$ con i, possiamo scrivere (riferendoci all'equazione $x^2 - 4x + 13 = 0$ considerata sopra) che:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{-1 \cdot 36} = \sqrt{i^2 \cdot 36} = i \cdot \sqrt{36} = i\,6.$$

Pertanto l'equazione $x^2 - 4x + 13 = 0$ ammette due soluzioni in campo complesso:

$$x = 2 \pm 3\,i.$$

Lo studente verifichi che, sostituendo $x = 2 \pm 3\,i$ nel membro sinistro dell'equazione $x^2 - 4x + 13 = 0$, questo sia effettivamente uguale a zero.

1.1. Definizione di numero complesso. Un numero complesso z è un numero la cui rappresentazione algebrica è data da

$$z = a + i\,b$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ ed i soddisfa la relazione $i^2 = -1$.
Il numero reale a è chiamato *parte reale* del numero complesso z, in formule $a = Re(z)$, mentre il numero reale b è chiamato *parte immaginaria* del numero complesso z, $b = Im(z)$. Infine, come abbiamo già detto, i è noto con il nome di *unità immaginaria.* Un numero complesso z la cui parte reale è pari a zero, $Re(z) = a = 0$ è detto *numero immaginario* e la sua rappresentazione algebrica è $z = i\,b$.
Per ogni numero complesso $z = a + i\,b$, il numero complesso $a - i\,b$ si dice *complesso coniugato* di z e si indica con $\bar{z}$.

Esempi 1.1
Calcolare il complesso coniugato di $z = 7 + i\,9$. Si ha:

$$\bar{z} = 7 - i\,9.$$

Calcolare il complesso coniugato di $z = 7 - i\,9$. Si ha:

$$\bar{z} = 7 + i\,9.$$

Da questi due esempi si deduce un risultato generale: il complesso coniugato del complesso coniugato di un numero z coincide con z stesso. In formule:

$$\bar{\bar{z}} = \overline{\left(\overline{a + i\,b}\right)} = \overline{a - i\,b} = a + i\,b = z.$$

Calcolare il complesso coniugato di $z = 3.1 - i\,2.42$. Risulta:

$$\bar{z} = 3.1 + i\,2.42.$$

2. Operazioni con i numeri complessi

Anche per i numeri complessi è possibile definire le operazioni binarie di somma e moltiplicazione. In particolare, dati due numeri complessi

$$z_1 = a_1 + i\,b_1 \text{ e } z_2 = a_2 + i\,b_2$$

indicheremo con il segno + l'operazione di addizione e la definiremo come segue:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i\,b_1) + (a_2 + i\,b_2) = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2).$$

Quindi la somma di due numeri complessi, z_1 e z_2, è un numero complesso la cui parte reale è la somma delle parti reali di z_1 e z_2 e la sua parte immaginaria la somma delle parti immaginarie di z_1 e z_2.
La sottrazione $(-)$ può essere definita, come nel caso dei numeri reali,

come la somma fra due numeri complessi di cui uno è preso con segno negativo:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 + i\, b_1) - (a_2 + i\, b_2) = (a_1 - a_2) + i\,(b_1 - b_2).$$

Esempi 2.1
Calcolare la somma dei numeri complessi $z_1 = 3 + i$ e $z_2 = 5 - i\,11$. Si ha:

$$z_1 + z_2 = (3 + i) + (5 - i\,11) = (3 + 5) + i\,(1 - 11) = 8 - i\,10.$$

Calcolare la somma del numero complesso $z = 1 + i\,2$ e del suo complesso coniugato:

$$z + \bar{z} = (1 + i\,2) + (1 - i\,2) = (1 + 1) + i\,(2 - 2) = 2.$$

Calcolare la differenza tra il numero complesso $z = 5 + i\,8$ e il suo complesso coniugato:

$$z - \bar{z} = (5 + i\,8) - (5 - i\,8) = (5 - 5) + i\,(8 + 8) = i\,16.$$

Da questi due esempi possiamo dedurre due risultati generali:

(1) La somma tra un numero complesso e il suo complesso coniugato è pari a 2 volte la parte reale del numero complesso

$$z + \bar{z} = (a + i\,b) + (a - i\,b) = 2\,a = 2\,Re(z)$$

(2) La differenza tra un numero complesso e il suo complesso coniugato è pari a i per 2 volte la parte immaginaria del numero complesso

$$z - \bar{z} = (a + i\,b) - (a - i\,b) = i\,2\,b = i\,2\,Im(z).$$

Per quanto riguarda la moltiplicazione, questa sarà indicata con il simbolo $\cdot$ e sarà definita come il prodotto di due binomi:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 =& (a_1 + i\,b_1) \cdot (a_2 + i\,b_2) = a_1\,a_2 + i\,a_1\,b_2 + i\,a_2\,b_1 + i^2\,b_1\,b_2 = \\ =& (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1), \end{aligned}$$

dove il termine $-b_1\,b_2$ si ottiene tenendo conto che $i^2 = -1$. E' facile osservare che:

$z^2 = (a + i\,b)^2 = (a^2 - b^2) + 2\,i\,a\,b,$ che è ancora un numero complesso e che

$z \cdot \bar{z} = (a + i\,b) \cdot (a - i\,b) = a^2 + b^2,$ che è un numero reale positivo.

Esempi 2.2
Calcolare il prodotto dei numeri complessi $z_1 = 4 + 5\,i$ e $z_2 = 3 + 2\,i$. Si ha:

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5\,i) \cdot (3 + 2\,i) = (4 \cdot 3 - 5 \cdot 2) + i\,(5 \cdot 3 + 4 \cdot 2) = 2 + i\,23.$$

Calcolare il prodotto del numero complesso $z = 1 + i\,2$ e del suo complesso coniugato:

$$z \cdot \bar{z} = (1 + i\,2) \cdot (1 - i\,2) = (1 + 4) + i\,(2 - 2) = 5.$$

Il reciproco di un numero complesso $z = a + i\,b$ è definito come il numero complesso che moltiplicato per z dà come risultato 1:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + i\,b}.$$

Tuttavia, per ottenere un risultato nella forma algebrica $\frac{1}{z} = A + i\,B$ è necessario moltiplicare numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore. Si ha:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a - i\,b}{(a + i\,b) \cdot (a - i\,b)} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) - i\,\left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right).$$

Esempio 2.3
Calcolare il reciproco del numero complesso $z = 2 + 3\,i$. Risulta:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2 + 3\,i} = \frac{2 - 3\,i}{4 + 9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}\,i$$

La divisione di due numeri complessi è definita come la divisione di due binomi:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i\,b_1}{a_2 + i\,b_2}.$$

Per ottenere il risultato nella forma algebrica $\frac{z_1}{z_2} = A + i\,B$ è sufficiente tenere conto del fatto che $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$ e sfruttare le regole già discusse per calcolare il prodotto di due numeri complessi e il reciproco di un numero complesso.

Esercizio 2.1
Esprimere il rapporto tra due numeri complessi, $z_1 = a_1 + i\,b_1$ e $z_2 = a_2 + i\,b_2$, nella forma algebrica $\frac{z_1}{z_2} = A + i\,B$.

2.1. Proprietà dei complessi coniugati. Come visto nell'esempio introduttivo, la soluzione dell'equazione $z^2 - 4z + 13 = 0$ è data dal numero complesso $z = 2 + 3\,i$ e dal suo complesso coniugato $\bar{z} = 2 - 3\,i$. Questo risultato non è casuale. Infatti, in generale, se un'equazione polinomiale ammette un numero complesso come soluzione allora ammetterà come soluzione anche il suo coniugato. Valgono le seguenti proprietà.

TEOREMA 2.1. *Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Allora*

(1) *$z = \bar{z}$ se e solo se $z \in \mathbb{R}$, ossia $Im(z) = 0$.*

(2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
(3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

Proof. Dimostriamo la (1). Dimostriamo prima l'implicazione diretta: $z = \bar{z} \Rightarrow Im(z) = 0$. Consideriamo la rappresentazione algebrica di $z = a + i\,b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Secondo questa notazione sarà $\bar{z} = a - i\,b$. Se $z = \bar{z} \Rightarrow a + i\,b = a - i\,b$ che è vera se e solo se $b = -b$. Essendo $b \in \mathbb{R}$ quest'ultima equazione implica $b = 0$. Ricordando che, per definizione, $b = Im(z)$ il teorema resta provato. Si lascia allo studente la dimostrazione dell'implicazione inversa, ossia: se $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z}$.

Dimostriamo ora la proprietà (2), usando anche in questo caso la notazione algebrica: $z_1 = a_1 + i\,b_1$ e $z_2 = a_2 + i\,b_2$. Sfruttando la definizione precedentemente data dell'operazione di somma, abbiamo:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} =& \overline{(a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)} = (a_1 + a_2) - i\,(b_1 + b_2) = \\ =&(a_1 - i\,b_1) + (a_2 - i\,b_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,\end{aligned}$$

che è quanto volevasi dimostrare. In modo analogo, e con la stessa notazione possiamo dimostrare la proprietà (3):

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} =& \overline{(a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1)} = \\ =&(a_1\,a_2 - b_1\,b_2) - i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1) = \\ =&(a_1 - i\,b_1) \cdot (a_2 - i\,b_2) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,\end{aligned}$$

□

Le proprietà appena dimostrate consentono di dimostrare il il seguente importante teorema.

Teorema 2.2. *Sia*

$$a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + ... + a_1\,x + a_0 = 0$$

un'equazione polinomiale nella variabile x i cui coefficienti a_0, a_1, ..., a_n $\in \mathbb{R}$. Se $x = a + i\,b \in \mathbb{C}$ è soluzione dell'equazione, allora anche il suo complesso coniugato $\bar{x} = a - i\,b$ è soluzione dell'equazione.

Proof. Sia $x = a + i\,b$ soluzione dell'equazione $a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + ... + a_1\,x + a_0 = 0$. Essendo il membro destro pari a $0 \in \mathbb{R}$ anche il membro sinistro sarà un numero reale. Quindi il complesso coniugato di $a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + ... + a_1\,x + a_0$ sarà anche uguale a 0 (per la proprietà (1) dimostrata sopra). Quindi $x = a + i\,b$ è anche soluzione dell'equazione:

$$\overline{a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + ... + a_1\,x + a_0} = 0.$$

Applicando iterativamente la proprietà (2) dimostrata sopra, questa equazione diventa:

$$\overline{a_n\,x^n} + \overline{a_{n-1}\,x^{n-1}} + ... + \overline{a_1\,x} + \overline{a_0} = 0,$$

che, tenuto conto del fatto che tutti i coefficienti $a_i \in \mathbb{R}$ e della proprietà (3), possiamo riscrivere nel seguente modo:

$$a_n\,\overline{x^n} + a_{n-1}\,\overline{x^{n-1}} + ... + a_1\,\overline{x} + a_0 = 0.$$

Infine applicando iterativamente la proprietà (3) otteniamo:

$$a_n\,\overline{x}^{\,n} + a_{n-1}\,\overline{x}^{\,n-1} + ... + a_1\,\overline{x} + a_0 = 0.$$

Questa uguaglianza mostra che $\bar{x} = a - i\,b$ è pure soluzione dell'equazione iniziale. $\square$

3. Esercizi di riepilogo

1. *Si determini il rapporto tra i numeri complessi* $x = 1 + 3\,i$ *e* $\overline{x} = 1 - 3\,i$

2. *Si dimostri che l'insieme di numeri complessi* $M = \{z \in \mathbb{C} : z = a + i\,b\ \forall\, a, b \in \mathbb{R} : b = \sqrt{4 - a^2}\}$ *è formato da numeri che hanno lo stesso modulo e se ne determini il valore.*

3. *Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione* $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0.$

4. *Sia* $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ *e* $x = 1 - \sqrt{3}\,i$*. Si determini il modulo del prodotto* $x\,z$ *e del rapporto* $\frac{z}{x}$*.*

5. *Sia* $z = 3 + \sqrt{2}\,i$ *e* $x = 2 - \sqrt{3}\,i$*. Si determini il complesso coniugato del prodotto* $x\,z$ *e del rapporto* $\frac{z}{x}$