

Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

06 - Limiti

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Pecorella, D.

Provenzano e A. Consiglio

1. Introduzione

Il concetto di limite è di fondamentale importanza in matematica. Vedremo che le definizioni di derivata e integrale di una funzione si basano proprio sul concetto di limite.

In questa prima fase daremo una definizione intuitiva che sarà formalizzata successivamente.

Sia $c \in \mathbb{R}$ un punto e sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Il punto c non deve necessariamente appartenere ad A , però è importante che la funzione sia definita in tutti i punti x vicini a c . Si intuisce che il punto c è un punto di accumulazione per A .

Il nostro problema consiste nel capire quale valore assume $f(x)$ quando x si avvicina a c . Se tale valore esiste (nel senso che definiremo meglio in seguito) diremo che il limite di $f(x)$ per x che tende a c è pari a l e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

Esempio 1.1

Si consideri la funzione $f(x) = x^3 + 2$. Si ipotizzi di essere interessati a studiare cosa succede a $f(x)$ in prossimità di $x = 2$. In questo specifico caso, via via che ci avviciniamo a 2, è facile osservare che $f(x)$ assume il valore $l = 10$, ovvero i valori assunti dalla $f(x)$, per valori della x vicini a 2, sono prossimi a 10, quindi $l = f(2)$. A tal fine si consideri il diagramma di figura 1.

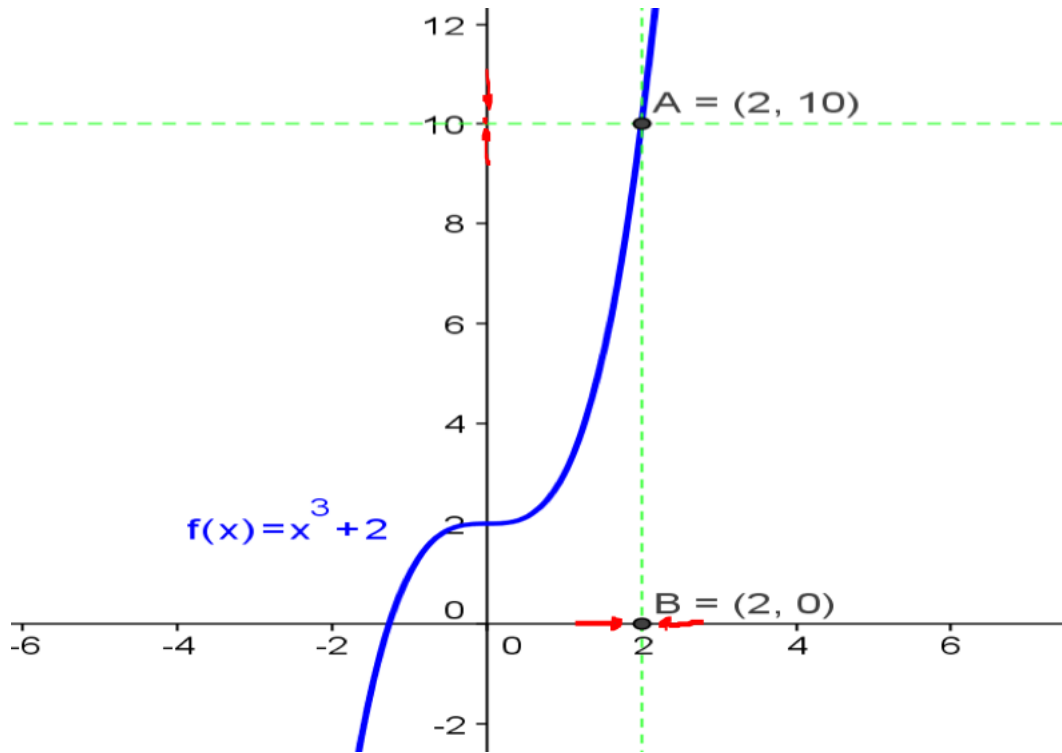
In alcuni casi, la funzione potrebbe non essere definita in c , ossia c è un punto di accumulazione per $D(f)$, ma $c \notin D(f)$. Ciò non cambia la sostanza del concetto di limite, nel senso che possiamo sempre determinare qual è il comportamento della $f(x)$ in prossimità di tale punto.

Esempio 1.2

La funzione $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ è definita su tutti i reali tranne $x = 2$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Il punto $c = 2$ è comunque un punto di accumulazione per $D(f)$, quindi, è possibile investigare cosa succede a $f(x)$ quando ci avviciniamo, ma non raggiungiamo, $c = 2$, ovvero

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

Cerchiamo, innanzitutto, di tracciare il grafico di $f(x)$ (vedi figura 2). Come si può osservare, sebbene la $f(x)$ non sia definita in $x = 2$, via via che x si avvicina a 2, la $f(x)$ si avvicina al valore 12. Ciò soddisfa la definizione intuitiva di limite che abbiamo dato. In

FIGURA 1. $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 + 2 = 10$

effetti, con semplici passaggi algebrici, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

Riferendoci all'esempio 1, possiamo considerare l'avvicinamento a c per valori di $x < c$ oppure per valori $x > c$. In alcuni casi è importante studiare il comportamento limite di una funzione avvicinandosi a c dalla destra ($x > c$) o avvicinandosi a c dalla sinistra ($x < c$). Nel primo caso, se il limite esiste, diremo che esiste il *limite destro* e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$$

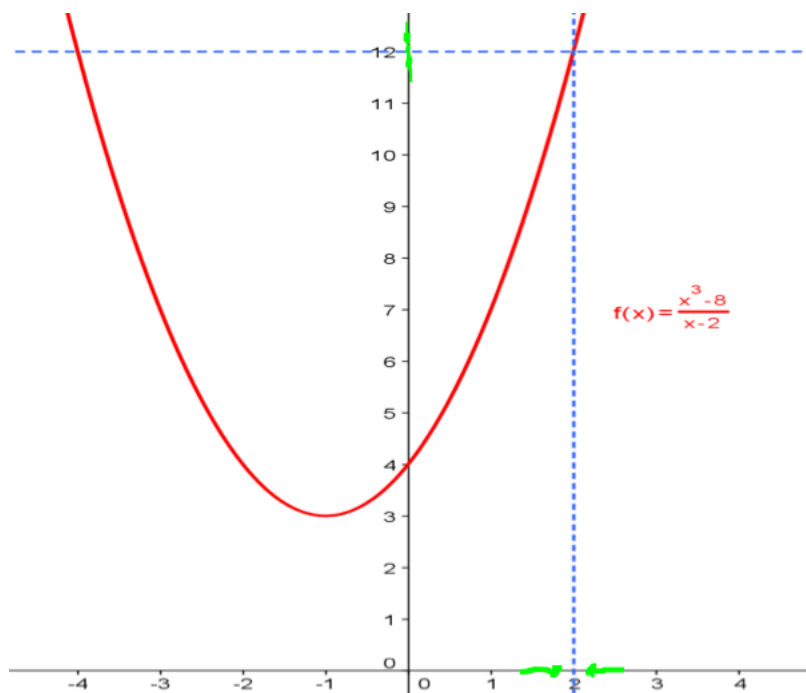
nel secondo caso, se il limite esiste, diremo che esiste il *limite sinistro* e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$$

Nei casi che abbiamo visto finora,

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$$

ossia, i due limiti coincidono e in questo caso diremo che il limite nel punto c esiste.

FIGURA 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

Si osservi, adesso, il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{2}x + 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

come riportato in figura 3.

Come si può notare,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \quad \text{mentre} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$$

Sebbene esistano il limite destro e sinistro, non è possibile concludere quale sia il comportamento della funzione per x che si avvicina a 2. In questo caso il limite non esiste. In generale, se il limite destro e sinistro non coincidono, oppure non esistono, il limite per $x \rightarrow c$ non esiste.

Esaminiamo la funzione di figura 4 nei punti π e 2π . Come si può osservare, per x che si avvicina a π o a 2π , la funzione $f(x)$, se presa in valore assoluto, diventa arbitrariamente grande, ossia $f(x) \rightarrow \infty$. Quindi, il $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ ed il $\lim_{x \rightarrow 2\pi} f(x)$ non esistono, nel senso che non c'è un l finito cui la funzione converge quando x tende a π o 2π . Scriveremo che

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = +\infty$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi^+} f(x) = +\infty$$

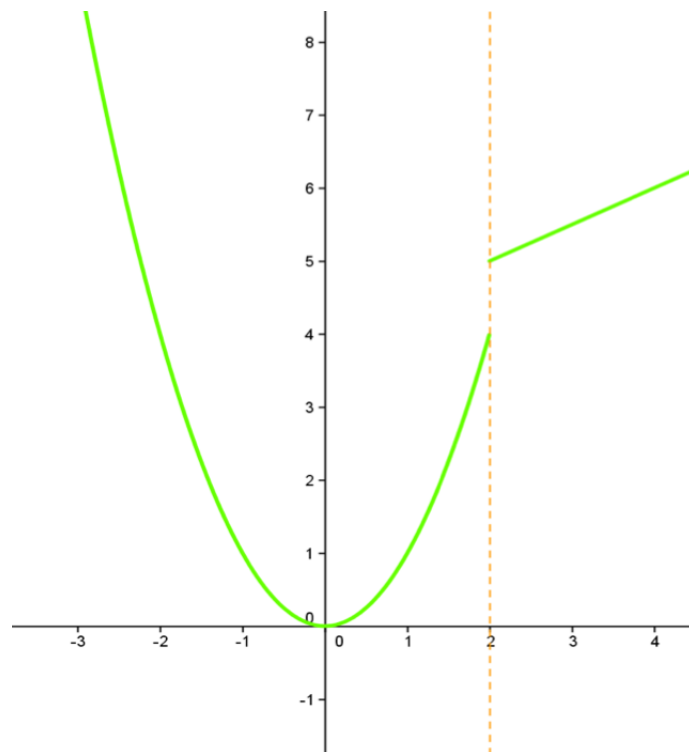


FIGURA 3. Grafico della funzione $f(x) = x^2$ se $x < 2$;
 $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ se $x \geq 2$

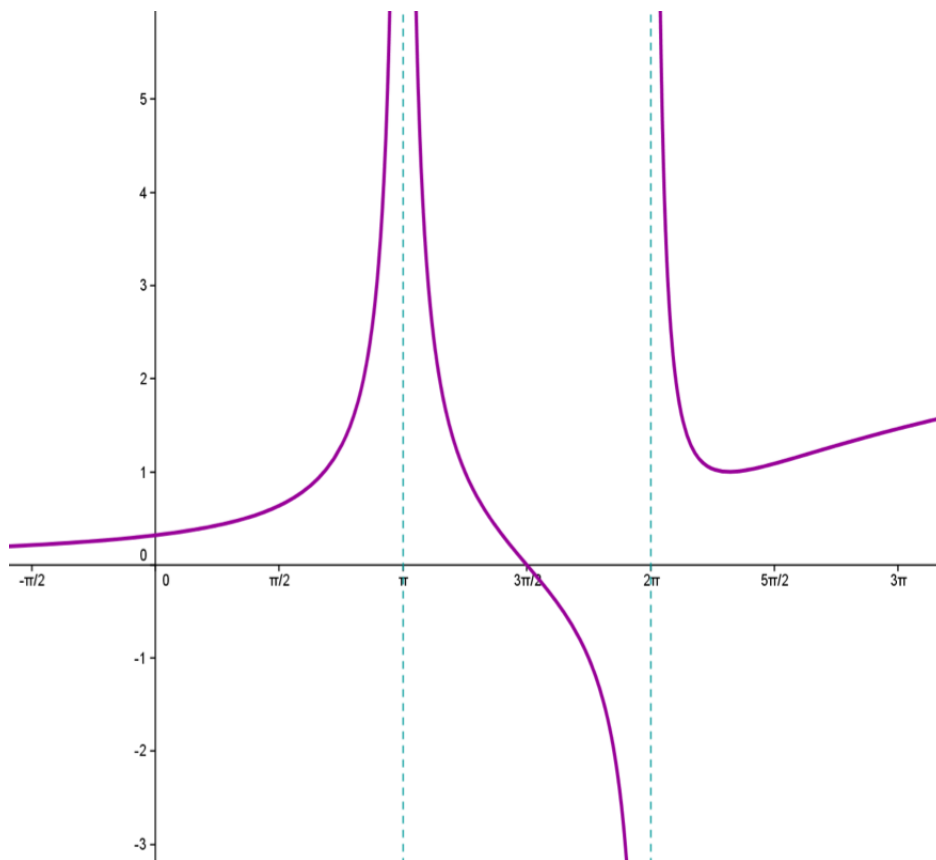
Tale scrittura è impropria in quanto la definizione (intuitiva) di limite e anche il significato della parola limite non prevede che il limite l sia non finito. In effetti e per tutte le applicazioni del limite, in questi casi dovremmo concludere che il limite non esiste per $x \rightarrow \pi$ e $x \rightarrow 2\pi$.

Nei casi visti finora, l'esistenza o la non esistenza del limite può verificarsi tramite una semplice ispezione del grafico di $f(x)$. Non sempre ciò è possibile ed in alcuni casi si potrebbe incorrere in errori.

Esempio 1.3

Il grafico della funzione $f(x) = \sin(\pi/x)$ (figura 5) sembra avere come limite 0. Comunque, da una osservazione più ravvicinata, si evince che la funzione oscilla fra -1 ed 1 via via che x si avvicina a 0. Anche in questo caso, sebbene la funzione sia limitata, il limite non esiste per l'oscillazione della funzione nelle vicinanze di 0.

Infine, vedremo una tipologia di funzioni per cui la valutazione della funzione in c restituisce una forma indeterminata, ma il limite esiste.

FIGURA 4. Si osservi la funzione in π e 2π **Esempio 1.4**

Si determini

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Se valutiamo la funzione in 0, si ottiene la forma priva di significato $\frac{0}{0}$. Ispezionando il grafico della funzione (figura 6), si nota che per $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow 0^-$ si ha che $f(x) \rightarrow 1$.

2. Definizione di limite

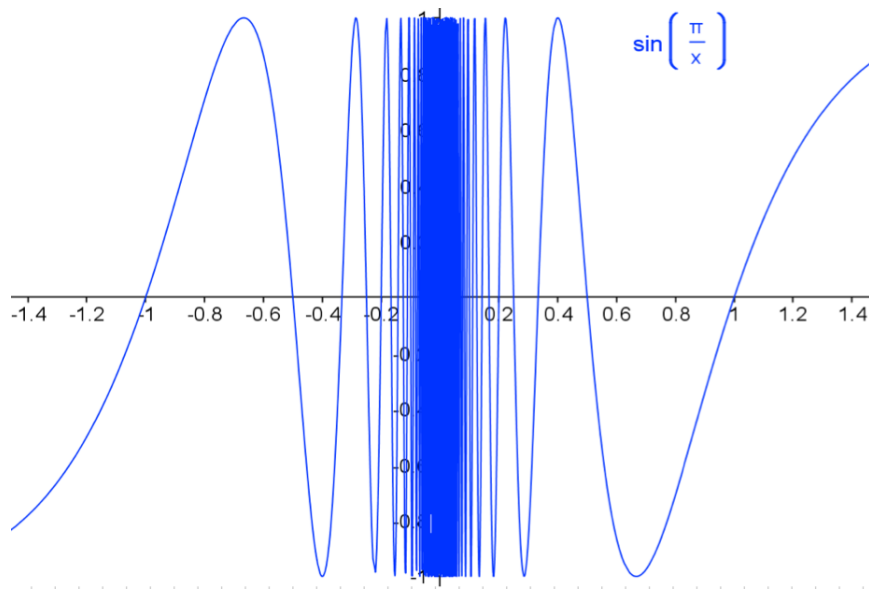
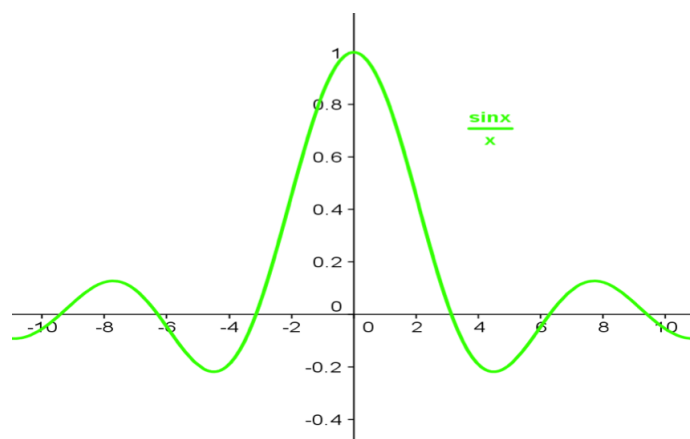
Possiamo adesso introdurre la definizione formale di limite

Definizione Sia c un punto di accumulazione per $D(f)$, dominio della funzione f . Si dice che la funzione $f(x)$ ammette limite l per x che tende a c e scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

se, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ dipendente da ϵ tale che $\forall x \in D(f)$ e $0 < |x - c| < \delta_\epsilon$

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

FIGURA 5. $f(x) = \sin(\pi/x)$ FIGURA 6. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

In tal caso si dice che $f(x)$ converge a l per $x \rightarrow c$.

È importante sottolineare due punti:

- Essendo $|x - c| > 0$ si ha che $x \neq c$, quindi, nella definizione di limite *non ha* importanza il valore che assume la funzione in c .
- Se il punto c non fosse di accumulazione per $D(f)$, la definizione di limite non avrebbe senso. Infatti siamo sicuri che esistono punti di $D(f)$ tali che $0 < |x - c| < \delta$ solo se c è un punto di accumulazione per $D(f)$.

Dalla definizione di limite si evince che l è il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow c$ se $\forall \epsilon > 0$, ossia qualunque sia l'intervallo aperto centrato in l

$$(l - \epsilon, l + \epsilon)$$

$\exists \delta_\epsilon > 0$ dipendente da ϵ , tale che, $\forall x$ appartenente all'intervallo $(c - \delta_\epsilon, c + \delta_\epsilon)$, ossia $c - \delta_\epsilon < x < c + \delta_\epsilon$, si ha che

$$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$

Ci sono diversi modi per la formulazione del concetto di limite. Le seguenti formulazioni sono equivalenti:

- i: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$
- ii: $\lim_{h \rightarrow 0} f(c + h) = l$
- iii: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - l) = 0$
- iv: $\lim_{x \rightarrow c} |f(x) - l| = 0$

Vediamo come possiamo utilizzare la definizione di limite per determinare il limite di alcune semplici funzioni.

Esempio 2.1

Determinare $\lim_{x \rightarrow c} x^2 = c^2$.

Per la definizione di limite dobbiamo cercare un $\delta_\epsilon > 0$ tale che se $0 < |x - c| < \delta_\epsilon$ allora $|x^2 - c^2| < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$.

Si osservi che $x^2 - c^2 = (x - c)(x + c)$ e di conseguenza

$$|x - c||x + c| = |x^2 - c^2|$$

Ipotizziamo che $|x - c| < 1$, quindi,

$$c - 1 < x < c + 1$$

e

$$|x + c| \leq |x| + |c| < c + 1 + |c| \leq 2|c| + 1$$

Se, pertanto, $|x - c| < 1$ allora

$$|x^2 - c^2| < (2|c| + 1)|x - c|$$

Se scegliamo $|x - c| < \frac{\epsilon}{2|c| + 1}$, si ha che

$$|x^2 - c^2| < \epsilon$$

In particolare, se $\delta_\epsilon = \min \left[1, \frac{\epsilon}{2|c| + 1} \right]$ avremo che $|x^2 - c^2| < \epsilon$ e quindi il limite è c .

Per verificare che il meccanismo funzioni, si scelga un $\epsilon > 0$ e si scelga un δ_ϵ uguale al $\min \left[1, \frac{\epsilon}{2|c| + 1} \right]$.

Se $0 < |x - c| < \delta_\epsilon$, allora $|x - c| < 1$ e $|x - c| < \frac{\epsilon}{2|c| + 1}$. Come visto sopra, $|x^2 - c^2| < (2|c| + 1)|x - c|$ e siccome $|x - c| < \frac{\epsilon}{2|c| + 1}$, allora $|x^2 - c^2| < \epsilon$.

In maniera analoga a quanto fatto per l'esempio precedente, si può determinare il limite di alcune funzioni basilari. In particolare, si può dimostrare, utilizzando la definizione di limite, che

$$\lim_{x \rightarrow c} x = c$$

$$\lim_{x \rightarrow c} |x| = |c|$$

$$\lim_{x \rightarrow c} k = k$$

Come visto nell'introduzione, è necessario definire il concetto di limite nella parte destra e sinistra del punto di accumulazione cui tende la variabile indipendente. In particolare, la definizione di *limite destro* e *limite sinistro* è data da:

Definizione Si parla di limite destro

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$$

se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0$ tale che per $c < x < c + \delta_\epsilon$, $|f(x) - l| < \epsilon$.

Analogamente si parla di limite sinistro

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$$

se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0$ tale che per $c - \delta_\epsilon < x < c$, $|f(x) - l| < \epsilon$.

Si noti che se esistono e sono finiti il limite destro e il limite sinistro ed inoltre

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

Definizione Sia $f(x)$ una funzione il cui dominio è $D(f)$ e sia c un punto di accumulazione per $D(f)$, diremo che $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a c , e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$$

se $\forall M > 0, \exists \delta_M > 0$ tale che $f(x) > M$ per $0 < |x - c| < \delta_M$. Si dice anche che la funzione *diverge* per $x \rightarrow c$, ovvero che la funzione non è limitata superiormente nell'intorno di c .

3. Teoremi sui limiti

Vediamo alcuni teoremi sui limiti

TEOREMA 3.1 (dell'unicità del limite). *Il limite di una funzione (per $x \rightarrow c$) se esiste è unico.*

DIMOSTRAZIONE. Ipotizziamo per assurdo che

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = m$$

con $l \neq m$. Allora dovrebbe succedere che $\forall \epsilon > 0$,

$$\forall x \in D(f) \wedge 0 < |x - c| < \delta_\epsilon^1, \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

e anche

$$\forall x \in D(f) \wedge 0 < |x - c| < \delta_\epsilon^2, \quad |f(x) - m| < \epsilon$$

Si ponga

$$\epsilon = \frac{|l - m|}{2}; \quad \delta_\epsilon = \min(\delta_\epsilon^1, \delta_\epsilon^2)$$

avremo che

$$\begin{aligned} |l - m| &= |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m| < \\ &< \frac{1}{2}|l - m| + \frac{1}{2}|l - m| = |l - m| \end{aligned}$$

con l'ovvia contraddizione $|l - m| < |l - m|$ □

TEOREMA 3.2 (della permanenza del segno). *Sia $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \neq 0$, allora $\exists \delta_\epsilon > 0$ tale che $\forall x \in D(f)$ e $0 < |x - c| < \delta_\epsilon$, si ha che $f(x)$ ha lo stesso segno di l .*

TEOREMA 3.3 (del confronto). *Siano f, g, h tre funzioni aventi lo stesso dominio A , e sia*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in A, \quad x \neq c$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l$$

TEOREMA 3.4 (proprietà dei limiti). *Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = m$, allora*

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = l + m$$

$$ii) \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$$

$$iii) \quad \lim_{x \rightarrow c} [\alpha \cdot f(x)] = \alpha \cdot l \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$iv) \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m} \quad \text{con } m \neq 0$$

Quest'ultimo teorema può essere esteso per induzione alla somma e/o prodotto di n funzioni, quindi, se

$$\lim_{x \rightarrow c} f_i(x) = l_i, \text{ per } i = 1, 2, \dots, n$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow c} \sum_{i=1}^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n l_i, \text{ per } i = 1, 2, \dots, n$$

e

$$\lim_{x \rightarrow c} \prod_{i=1}^n f_i(x) = \prod_{i=1}^n l_i, \text{ per } i = 1, 2, \dots, n$$

In particolare, se si considera il polinomio di grado n -esimo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

per i teoremi appena visti

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0 = P(c)$$

Si osservi che i teoremi appena visti si basano sull'ipotesi che i limiti della funzione $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ esistano.

Esempio 3.1

Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{x - 4}$$

Si potrebbe erroneamente concludere che tale limite sia eguale a 0, in quanto $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right) = 0$. In effetti, per $x \rightarrow 4$, la seconda funzione diverge a infinito, quindi si ottiene la forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Se procediamo, invece, sommando le due frazioni della prima funzione, avremo che

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{4x} \cdot \frac{1}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} -\frac{1}{4x} = -\frac{1}{16}$$

3.1. Asintoti orizzontali: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che la funzione $f(x)$ ammette limite l per x che tende a $+\infty$ e scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

se, $\forall \epsilon > 0, \exists M_\epsilon > 0$ tale che $\forall x \in D(f)$ e $x > M_\epsilon$

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

In modo analogo possiamo definire il $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$:

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che la funzione $f(x)$ ammette limite l per x che tende a $-\infty$ e scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

se, $\forall \epsilon > 0, \exists M_\epsilon < 0$ tale che $\forall x \in D(f)$ e $x < M_\epsilon$

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

3.2. Limiti di funzioni non limitate. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ } (-\infty)$$

se $\forall M > 0$ ($M < 0$) $\exists N_M > 0$ tale che $\forall x \in D(f)$ e $x > N_M$ allora $f(x) > M$ ($f(x) < M$).

In maniera analoga, diremo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ } (-\infty)$$

se $\forall M > 0$ ($M < 0$) $\exists N_M < 0$ tale che $\forall x \in D(f)$ e $x < N_M$ allora $f(x) > M$ ($f(x) < M$).

Esempio 3.2

Si provi che la funzione $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ tende a zero per x che tende a $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

Perndiamo un arbitrario $\epsilon > 0$ (piccolo a piacere). Dobbiamo trovare un $M > 0$ sufficientemente grande affinché $\forall x > M$ allora

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - 0 \right| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| < \epsilon$$

Per quanto visto nel calcolo del limite di $\frac{\sin(x)}{x}$ per $x \rightarrow 0$, si ha che, almeno per piccoli valori di y $|\sin y| \leq |y|$. Se $x \rightarrow \infty$ allora $\frac{\pi}{x} \rightarrow 0$ e dunque, ponendo $y = \frac{\pi}{x}$ nella disuguaglianza precedente abbiamo:

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| \leq \left| \frac{\pi}{x} \right|.$$

Quindi per soddisfare la disuguaglianza $\left| \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| < \epsilon$ basterà scegliere $M = \frac{\pi}{\epsilon}$. Infatti $\forall x > M$ avremo:

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| \leq \left| \frac{\pi}{x} \right| < \left| \frac{\pi}{M} \right| = \left| \frac{\pi}{\frac{\pi}{\epsilon}} \right| = \epsilon.$$

Non esiste una strategia unica per risolvere un limite. In breve, prima di concludere che il limite non esiste, oppure, arrendersi ad una forma indeterminata, si consiglia di:

- (1) Semplificare l'espressione tramite passaggi algebrici;

- (2) sempre attraverso manipolazioni algebriche, scomporre l'espressione in uno o più limiti notevoli;
- (3) se possibile, tracciare il grafico della funzione e ispezionare la funzione nelle vicinanze di c ;
- (4) ... $\left[\begin{array}{c} \circ \\ \parallel \\ \square \end{array} \right]$

Non sempre è possibile determinare il valore di un limite con semplici manipolazioni algebriche.

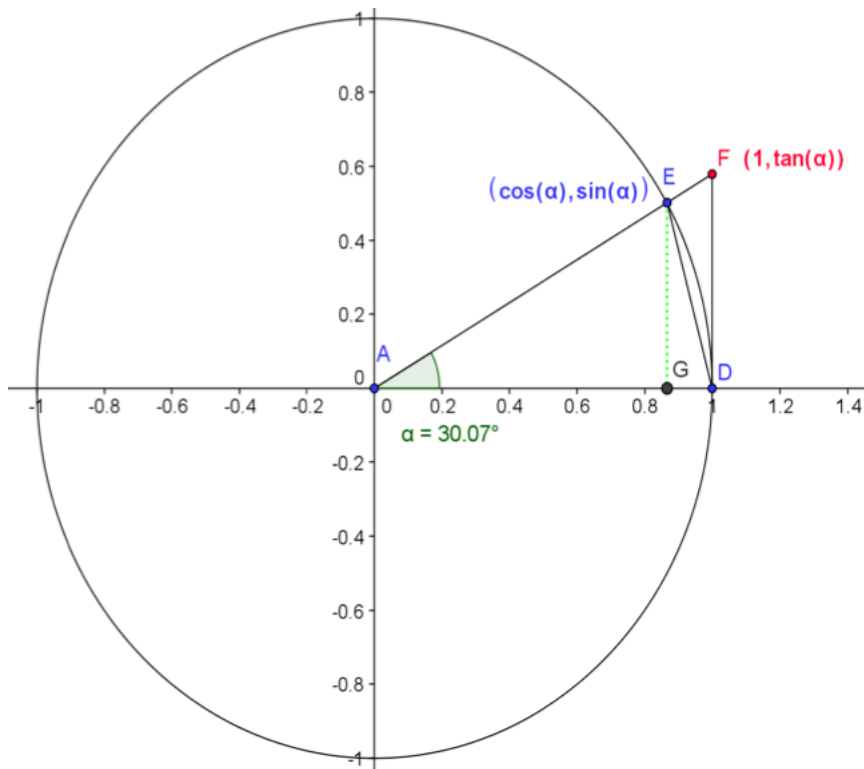


FIGURA 7. Cerchio trigonometrico per la dimostrazione di $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Esempio 3.3

Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Abbiamo visto graficamente e numericamente che il valore di questo limite è 1. Per dimostrare formalmente questo risultato è necessario ricorrere ad alcune nozioni di trigonometria e al teorema del confronto. Si osservi la figura 7.

L'area del triangolo AED è $\frac{(1)(\sin \alpha)}{2}$

L'area del settore circolare AED è $\frac{(1)^2\alpha}{2}$

L'area del triangolo AFD è $\frac{(1)(\tan \alpha)}{2} = \frac{1 \sin \alpha}{2 \cos \alpha}$ Come si può notare della figura 7:

area triangolo $AED <$ area settore circolare $AED <$ area triangolo AFD

Quindi possiamo scrivere:

$$\frac{\sin \alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{1 \sin \alpha}{2 \cos \alpha}$$

Se moltiplichiamo ogni termine per $\frac{2}{\sin \alpha}$, otteniamo che

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

e se consideriamo il reciproco dell'ultima catena di disequazioni

$$\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$$

Si osservi che la disuguaglianza è stata ottenuta per $\alpha > 0$, ma essendo $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ e $\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin \alpha}{-\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, la disuguaglianza è anche verificata per $\alpha < 0$. Se consideriamo i termini della suvvista disuguaglianza come funzioni di x , passando al limite per $x \rightarrow 0$ abbiamo che le funzioni agli estremi della disuguaglianza ($\cos x$ e 1) hanno il limite pari ad 1, quindi, per il teorema del confronto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Vediamo come è possibile utilizzare un limite notevole per la determinazione di un altro limite

Esempio 3.4

Si calcoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0 \end{aligned}$$

, infatti, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$

Esercizio 3.1

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{\sqrt{x} + x^2 - x^3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^5 - x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^4}{\sin^2 x^2}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - x^3 + 1}{1 - x^3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 12}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x}$$

Esercizio 3.2

Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{\sin x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{\sin(x-1)} \quad (5)$$