Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

07 - Continuità

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Pecorella, D. Provenzano e A. Consiglio

1. Introduzione

Possiamo esprimere informalmente il concetto di **continuità** affermando che una funzione è continua in un punto x_0 se NON c'è interruzione nel grafico della funzione in x_0. Nei 3 pannelli di Fig.1 si possono osservare tre valori della variabile x in cui il grafico della corrispondente funzione $f(x)$ presenta un'interruzione. In tutti gli altri punti del dominio $D(f)$, il grafico della funzione non presenta interruzioni ed è **continuo**. In particolare, si può osservare che la continuità viene meno quando si verifica una delle condizioni:

(1) La funzione non è definita nel punto $x = x_0$ (Fig.1a).
(2) Il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ non esiste (Fig.1b).
(3) il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ esiste, ma non coincide con $f(x_0)$ (Fig.1c).

1.1. Definizione di continuità in un punto. Una funzione $f : A \to B$ si dice continua in $x_0 \in A$ se le seguenti tre condizioni sono soddisfatte:

$$\begin{aligned} &f(x_0) \text{ è definita.} \\ &\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ esiste.} \\ &\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \end{aligned} \tag{1}$$

1.2. Definizione di continuità su intervalli aperti. Una funzione si dice continua su un intervallo aperto (a, b) se è continua in ogni punto dell'intervallo. Una funzione è continua ovunque se è continua su $(-\infty, \infty)$.

Se una funzione f è definita su un intervallo aperto (a, b), eccetto eventualmente in $c \in (a, b)$, ed f non è continua in c, allora diremo che f ha una discontinuità in c. Le **discontinuità** possono essere di due tipi:

- Discontinuità rimovibili.
- Discontinuità non rimovibili.

Una discontinuità in c si dice rimovibile se la funzione può essere definita o ridefinita in c in modo che essa risulti ivi continua. Per esempio le discontinuità riportate in Fig.1a e Fig.1c sono removibili, mentre la funzione riportata in Fig.1b ha una discontinuità non rimovibile in $x = 2$. In particolare, per rimuovere la discontinuità in Fig.1a basta ridefinire la funzione in $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ 12 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

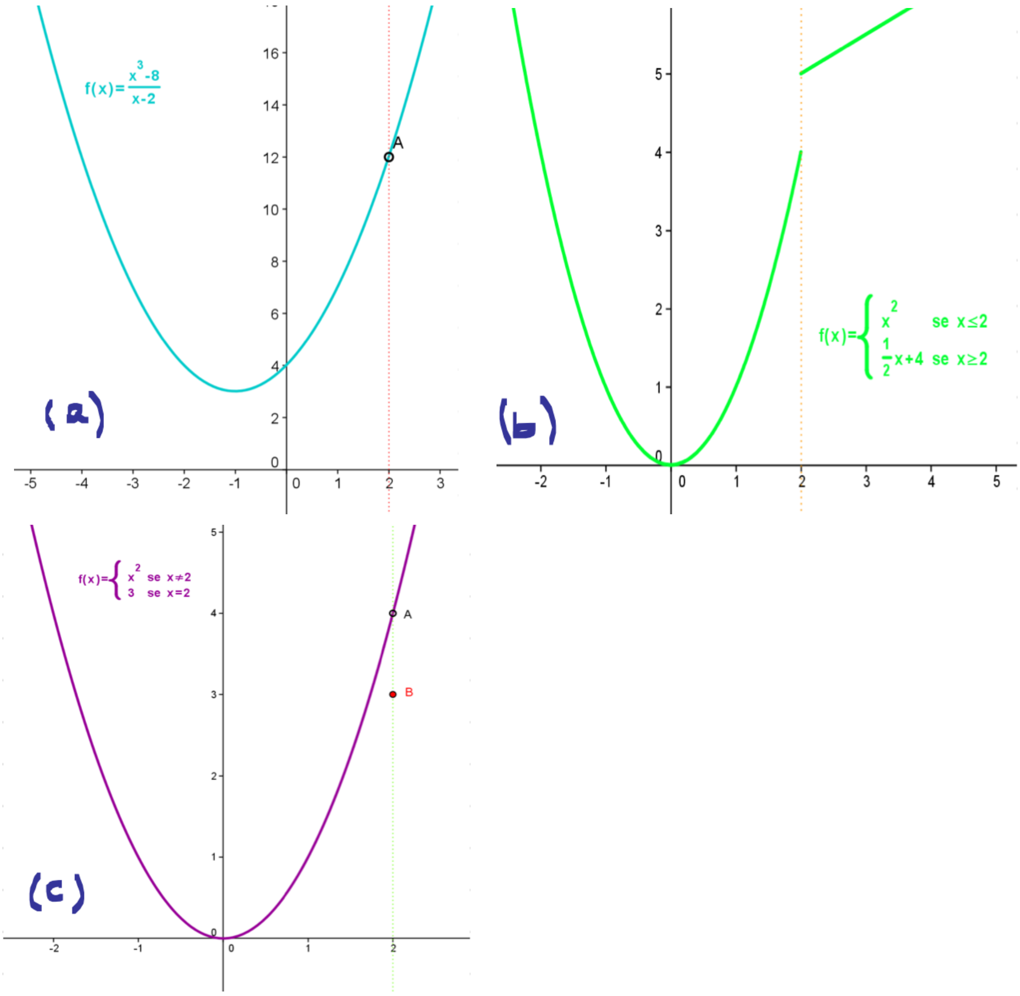

Figure 1. Esempi di funzioni con discontinuità. Nel pannello B la funzione vale $\frac{1}{2}x + 4$ per $x > 2$ (senza il segno di $=$).

In tal modo la funzione verifica le tre condizioni per la continuità in 2 indicate sopra. Allo stesso modo può essere modificata la funzione il cui grafico è riportato in Fig.1c:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

1.3. Definizione di continuità su intervalli chiusi. Una funzione è continua su un intervallo chiuso $[a, b]$ se è continua sull'intervallo aperto (a, b) e

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

In questo caso si dice che la funzione *è continua alla destra di a e continua alla sinistra di b*. Definizioni simili si possono fornire per funzioni che hanno come dominio $(a, b]$ oppure $[a, b)$. Per esempio la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è continua nell'intervallo $[0, \infty)$. Un esempio di funzione continua in un intervallo chiuso è $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, che è continua in $[-1, 1]$, in quanto continua in $(-1, 1)$ e

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \text{ e } \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 0.$$

Teorema 1.1. *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ ed f e g due funzioni continue in $x = c$. Allora le seguenti funzioni sono continue in c:*

- $\alpha \cdot f(x)$,
- $f(x) \pm g(x)$,
- $f(x) \cdot g(x)$,
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ *se* $g(c) \neq 0$.

Le funzioni:

- polinomiali: $p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0$;
- razionali: $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, dove $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni polinomiali e $q(x) \neq 0$;
- radicali: $f(x) = \sqrt[n]{x}$;
- trigonometriche: $\sin(x)$, $\cos(x)$

sono funzioni continue e, per il teorema precedente, lo sono tutte le funzioni ottenute come loro combinazioni.

Teorema 1.2 (Teorema del valor medio – TVI). *Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$. Sia $f(a) < f(b)$ (o, rispettivamente, $f(b) < f(a)$). Allora $\forall k \in [f(a), f(b)]$ (o, rispettivamente, $[f(b), f(a)]$) $\exists c \in [a, b]$ tale che $f(c) = k$.*

Una seconda formulazione del TVI è la seguente:

Teorema 1.3 (Teorema del valor medio – TVI – 2^a formulazione). *Sia I un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I. Allora $f(I)$ è un intervallo chiuso.*

In sostanza, il teorema del valore intermedio ci dice che un funzione continua mappa intervalli di $\mathbb{R}$ in intervalli di $\mathbb{R}$. Si osservi che questo teorema dimostra l'esistenza del punto c tale che $f(c) = k$, ma nulla dice su come determinare c. Inoltre il teorema dimostra l'esistenza di *almeno* un c. Quindi, nulla vieta che esistano più punti (c_1, c_2, ecc.) tali che $f(c_1) = f(c_2) = ... = k$.

Per esempio in Fig.2, la funzione $f(x) = 2\cos(x) + x$, definita sull'intervallo $[-2, 5]$, assume il valore $k = 1.5$ in $c_1 = 0.37$, $c_2 = 1.64$ e $c_3 = 3.42$. Notiamo che questa funzione in $x = -2$ vale $f(-2) = -2.83 < 0$, mentre in $x = 5$ essa vale $f(5) = 5.57 > 0$. Dunque $k = 0$ è un punto dell'intervallo $[f(a), f(b)] = [-2.83, 5.57]$. Scegliendo il valore $k = 0$, il TVI garantisce che esiste almeno $c \in [-2, 5]$ tale che $f(c) = 0$, ossia esiste almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo considerato. Questa conclusione, che sembra essere un corollario del TVI, è in realtà un teorema dimostrato da Bolzano nel 1800.

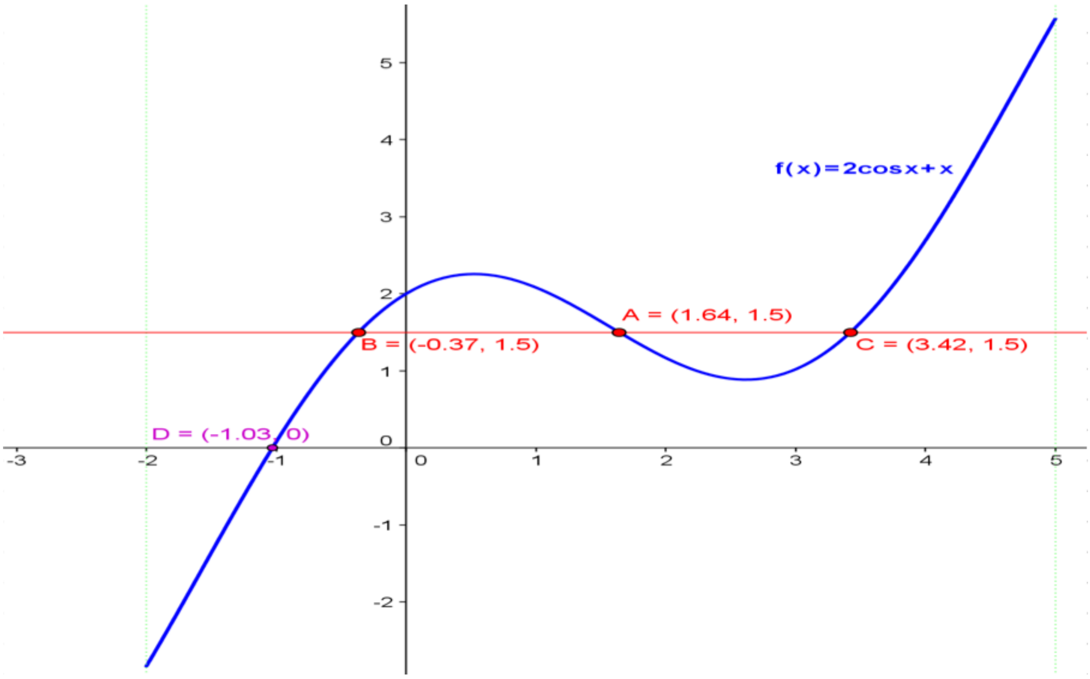

FIGURE 2. Esempio di funzione continua ($2\cos(x)+x$) su un intervallo chiuso e limitato: [-2,5].

TEOREMA 1.4 (Teorema di Bolzano o degli zeri). *Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e sia inoltre $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora $\exists c \in [a, b]$ tale che f(c)=0.*

Anche in questo caso il teorema stabilisce l'esistenza di almeno una radice, che, però non necessariamente sarà unica. Inoltre il teorema non fornisce alcun criterio per determinare tale radice, ossia per determinare il punto c.

Si osservi che una funzione discontinua in anche solo un punto dell'intervallo considerato NON gode della proprietà enunciata nel TVI. Ad esempio, per la funzione considerata in Fig.3, potrebbe esistere un k (nel codominio) per cui NON esiste un c tale che $f(c) = k$ (si ricorda che il teorema indica che, data l'ipotesi di continuità in un intervallo, allora $\forall k\ \exists c$: $f(c) = k$).

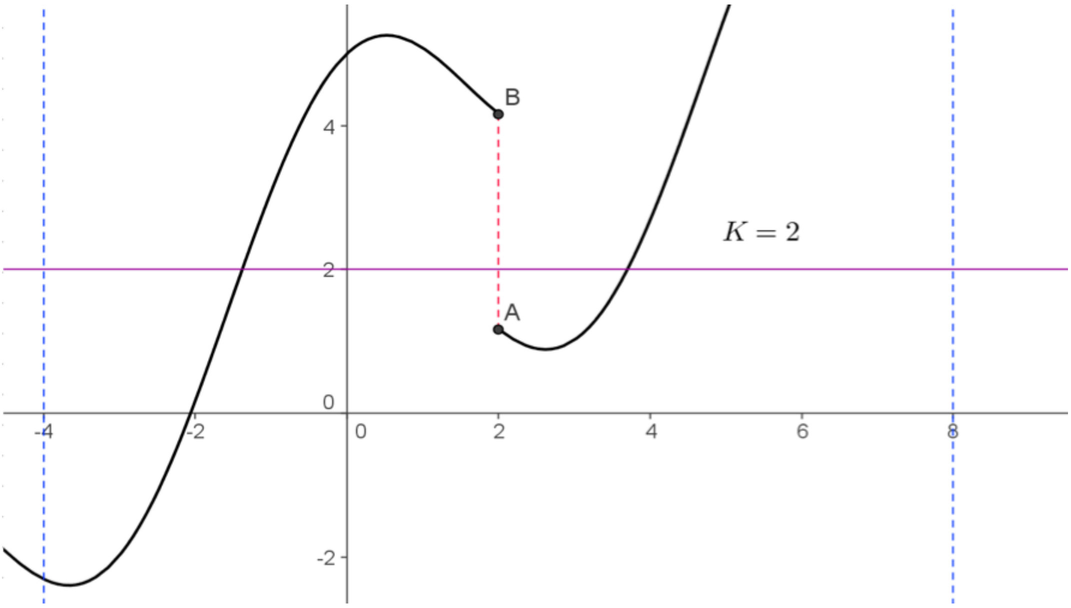

FIGURE 3. Esempio di funzione che NON soddisfa alle ipotesi del TVI (ad esempio) nell'intervallo $[0, 3]$.

2. Funzioni limitate

Abbiamo definito in una precedente lezione i concetti di insieme limitato e illimitato. Possiamo sfruttare questi concetti per definire le funzioni limitate e illimitate. In particolare:

2.1. Definizione di funzione limitata superiormente o inferiormente. Una funzione $f : A \to B$ si dice *limitata superiormente* (*inferiormente*) se il suo codominio è un insieme limitato superiormente (inferiormente).

Come visto in precedenza, una funzione può non risultare invertibile in tutto il suo dominio, ma esserlo in alcuni sotto-insiemi del dominio. Lo stesso vale per le proprietà di limitatezza. Per esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$, definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, è illimitata superiormente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, poichè

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

e, quindi, il codominio NON è limitato superiormente, ossia, in formule $sup\,[Cod(f)] = \infty$. Al contrario, la stessa funzione è limitata su $[1, \infty)$. In tal caso, la funzione ha come codominio (ossia come immagine) l'intervallo $(0, 1]$. In particolare essa avrà un massimo, ma non un minimo, poiché l'estremo inferiore (y=0) non appartiene al codominio di f.

Esistono condizioni che assicurano l'esistenza del massimo e del minimo di una funzione? Il seguente fondamentale teorema fornisce tali condizioni.

Teorema 2.1 (Teorema dei valori estremi o di Weierstrass). *Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, allora $f(x)$ ammette massimo e minimo in $[a, b]$, ossia esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $\forall x \in [a, b]$ allora*

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M.$$

Anche questo teorema è un teorema di *esistenza* poiché dimostra l'esistenza del massimo e del minimo di f in $[a, b]$, ma nulla dice sul valore del minimo e del massimo (m e M), o su come determinare i punti x_1 e x_2.

Si osservi che entrambe le ipotesi, (i) continuità di f e (ii) il fatto che $[a, b]$ sia un intervallo chiuso e limitato, non sono condizioni che possono essere rilassate. Infatti, ad esempio, la funzione x^3 non ha massimo in $[0, \infty)$ poiché questo intervallo (in cui la funzione è continua) non è limitato, mentre, la stessa funzione ammette massimo e minimo se definita in un qualsiasi intervallo $[0, \alpha]$, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Anche la condizione che l'intervallo sia chiuso è fondamentale. Ad esempio la funzione $f(x) = x$ non ammette massimo e minimo nell'intervallo $(0, 1)$ (che è un intervallo aperto), mentre li ammette entrambi in $[0, 1]$ (quali sono in questo caso i punti di massimo e minimo?).
Infine, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x = 1 \\ x & \text{se } 1 < x < 5 \\ 3 & \text{se } x = 5 \end{cases}$$

è definita sull'intervallo chiuso e limitato $[1, 5]$ ma non è ivi continua (lo studente verifichi questa affermazione). Dunque l'ipotesi del teorema NON è verificata. La funzione $f(x)$ non ammette massimo e minimo in $[1, 5]$. Ricercando il minimo, ad esempio, anche assumendo che esso sia in $x = 1 + \epsilon$, con $\epsilon > 0$, possiamo sempre prendere il punto $1 + \epsilon/2$ in cui abbiamo $f(1 + \epsilon/2) = 1 + \epsilon/2 < 1 + \epsilon = f(1 + \epsilon)$. Dunque $x = 1 + \epsilon$ non può essere il minimo per quanto piccolo si prenda ϵ. D'altro canto scegliendo $\epsilon = 0$ e, quindi, $x = 1$ le cose non migliorano poiché $f(1) = 3 >$ (ad esempio) $f(1 + 0.5) = 1.5$.[1]

[1] Si deve stare attenti, comunque, a non applicare il teorema di Sofia Loren. Infatti si potrebbe essere tentati di concludere che se una delle due ipotesi del teorema di Weierstrass non è verificata (funzione discontinua, oppure intervallo non chiuso e limitato, o entrambe le cose) per una certa funzione definita su un certo intervallo allora la funzione non ammette massimo e minimo nell'intervallo. Questo è falso! Se le ipotesi del teorema non sono soddisfatte, semplicemente non vi sarà garanzia dell'esistenza del massimo e del minimo, tuttavia essi potrebbero esistere.

Come sottolineato sopra, i teoremi appena visti sono teoremi che provano l'esistenza di una proprietà. Il teorema dei valori medi, nella sua variante con $k = 0$, può essere utilizzato come regola per identificare in quale intervallo si trovi lo zero di una funzione. Il cosiddetto **metodo della bisezione** utilizza, appunto, le risultanze del teorema degli zeri per determinare una soluzione (numerica) della generica equazione $f(x) = 0$. Tale metodo consiste nella suddivisione iterata dell'intervallo $[a, b]$ per cui risulta $f(a) \cdot f(b) < 0$. Procedendo in tal modo, in un numero finito di passi, si determinerà, con una buona approssimazione, il valore di c tale che $f(c) \simeq 0$. Nella figura seguente è riportata la sequenza di punti che converge a verso il numero irrazionale -1.0298665293222589 (circa 1.03) che soddisfa l'equazione $2\cos(x) + x = 0$.

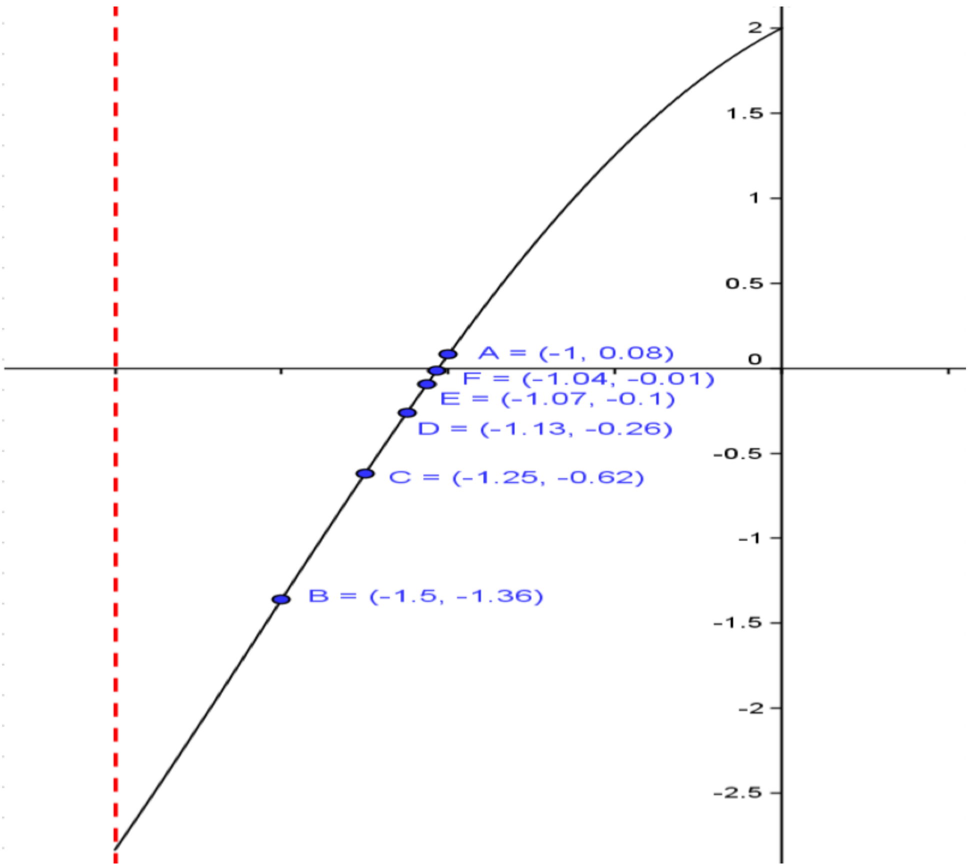

FIGURE 4. Soluzione attraverso il metodo di bisezione dell'equazione $2\cos(x) + x = 0$.

Per convincerci di ciò basta porre nella funzione appena considerata $f(1) = \frac{1}{2}$ e $f(5) = 10$.

Esempio 2.1
Funzioni continue e discontinuità rimovibili Determinare in quali intervalli la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \frac{x-2}{|x^2-4|}$$

è continua e verificare se gli eventuali punti di discontinuità siano rimovibili.

Possiamo scrivere la $f(x)$ come

$$f(x) = \frac{x-2}{|x-2| \cdot |x+2|} = \operatorname{sign}(x-2) \cdot \frac{1}{|x+2|},$$

dove la funzione $\operatorname{sign}(x)$ è la funzione *segno* che vale 1 se $x > 0$, -1 se $x < 0$ ed è indeterminata quando $x = 0$. La nostra funzione ha come dominio $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$. La funzione non è continua in -2 e 2. Consideriamo prima il punto $x = 2$. Abbiamo:

$$\lim_{x \to 2^-} \quad \operatorname{sign}(x-2) \cdot \frac{1}{|x+2|} = -\frac{1}{4};$$
$$\lim_{x \to 2^+} \quad \operatorname{sign}(x-2) \cdot \frac{1}{|x+2|} = \frac{1}{4}.$$

Limite destro e limite sinistro sono diversi. Quindi la discontinuità è di prima specie (si ha un salto della funzione) e non è eliminabile. Consideriamo adesso il punto $x = -2$. Si ha:

$$\lim_{x \to -2^-} \quad \operatorname{sign}(x-2) \cdot \frac{1}{|x+2|} = \lim_{x \to -2^-} \quad -\frac{1}{|x+2|} = -\infty;$$
$$\lim_{x \to -2^+} \quad \operatorname{sign}(x-2) \cdot \frac{1}{|x+2|} = \lim_{x \to -2^+} \quad -\frac{1}{|x+2|} = -\infty.$$

Questo risultato indica che $x = -2$ è una discontinuità di seconda specie (asintoto verticale) e, quindi, non eliminabile.

Esercizi 2.1
Determinare in quali intervalli le seguenti funzioni sono continue e verificare se gli eventuali punti di discontinuità siano rimovibili.

$$f(x) = \frac{x^3 - 3\,x + 2}{\sqrt{x-1}}.$$

$$f(x) = \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1 \\ 3\,x - x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3+x & \text{se } x < -2 \\ 5 & \text{se } x = -2 \\ x^2 - 3 & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

Esercizi 2.2

- Determinare per quali valori dei parametri A e B la seguente funzione è continua in x=2.
$$f(x) = \begin{cases} 2\,x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ A & \text{se } x = 2 \\ x^3 - 2\,B\,x & \text{se } x > 2. \end{cases}$$
- Determinare per quali valori dei parametri A e B la seguente funzione è continua in x=-1 e discontinua in x=2.
$$f(x) = \begin{cases} A\,x + B & \text{se } x < -1 \\ 2\,x & \text{se } -1 \le x \le 2 \\ 2\,B\,x - A & \text{se } x > 2. \end{cases}$$
- Determinare per quali valori dei parametri A e B la seguente funzione è continua in x=1 e continua in x=2.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 1 \\ \ln(A\,x + B) & \text{se } 1 < x \le 2 \\ \ln(2\,B\,x - A) & \text{se } x > 2. \end{cases}$$