Università degli Studi di Palermo

Facoltà di Economia

Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

08 - Derivate

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Pecorella, D. Provenzano e A. Consiglio

1. Introduzione

Nelle due figure riportate di seguito sono riportate due rette secanti una data curva e passanti per i punti A e B. E' interessante esprimere le coordinate del punto B in funzione della distanza h dall'ascissa di A. Il punto A è identificato dalle coppia ordinata $(c, f(c))$. Ad esempio, in figura 1, $A = (0.50, 0.45)$. Dalle coordinate di A possiamo immediatamente ottenere le coordinate di qualsiasi punto B la cui ascissa disti h dall'ascissa di A: $B = (c+h, f(c+h))$. L'equazione della retta passante per due punti $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ si scrive:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A},$$

da cui, esplicitando la y, otteniamo:

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A.$$

Questa equazione ci consente di esprimere il coefficiente angolare della retta (che ne determina la pendenza) in funzione delle coordinate dei due punti:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Quindi, se applichiamo questa formula al calcolo del coefficiente angolare della retta secante i punti $A = (c, f(c))$ e $B = (c+h, f(c+h))$ otteniamo:

$$m = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Tale quantità prende il nome di **rapporto incrementale** della funzione f in un intorno (di ampiezza h) del punto c. Se facciamo tendere

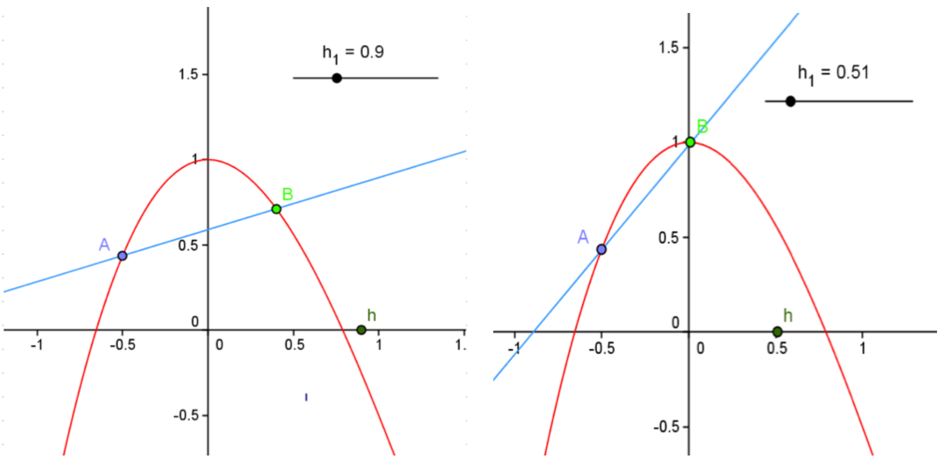

FIGURE 1. Esempi di rette secanti una curva.

a 0 la quantità h, allora i punti A e B tenderanno a sovrapporsi e il limite per h tendente a 0 del rapporto incrementale $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$, se finito, rappresenterà il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto $A = B = (c, f(c))$ e verrà indicato con la notazione $f'(c)$.

1.1. Definizione di funzione derivabile e derivata. Una funzione $f : A \to B$ si dice **derivabile** in $x \in A$ se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ esiste.}$$

Se questo limite esiste, esso è detto **derivata di f in x** e si denota con $f'(x)$.

Vediamo ora alcuni esempi di derivata di una funzione.

Esempi 1.1

- **Derivata di una funzione lineare.** Sia $f(x) = m\,x + b$. Calcoliamo il limite del rapporto incrementale in un generico punto x:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{m \cdot (x+h) + b - (m\,x + b)}{h} = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{m \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} m = m.$$

  Quindi, la derivata di una funzione lineare è il coefficiente angolare della funzione stessa.
- **Derivata della funzione x^2.** Sia $f(x) = x^2$ e calcoliamo il limite del rapporto incrementale nel generico punto x:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2\,h\,x - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2\,h\,x}{h} \\ = \lim_{h \to 0} h + 2\,x = 2\,x.$$

  Quindi la derivata della funzione $f(x) = x^2$ è una funzione di x e, in particolare, è una funzione lineare passante per l'origine: $f'(x) = 2\,x$. In figura 2 è riportata $f(x) = x^2$ e la sua derivata $f'(x) = 2\,x$. Si osservi che la tangente in $A = (-1, 1)$ ha come pendenza $m = -2$, che è proprio il valore che assume $f'(x)$ in $x = -1$.)

In generale, se una funzione f è derivabile in c, la retta passante per il punto $(c, f(c))$, tangente alla funzione f, ha come coefficiente angolare $f'(c)$ e la sua equazione è data da

$$y - f(c) = f'(c)\,(x - c)$$

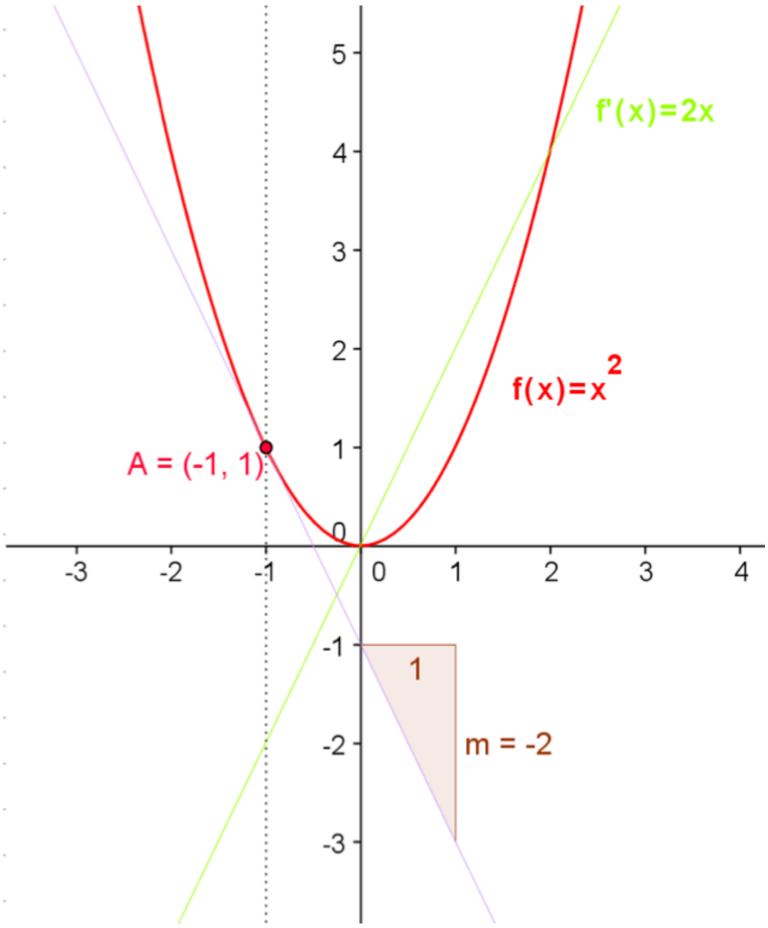

FIGURE 2. Grafico della funzione $f(x) = x^2$ e della sua derivata $f'(x) = 2\,x$.

Si osservi inoltre che tale retta è la migliore approssimazione lineare di f nell'intorno di c.

Esercizio 1.1
Verificare che le derivate delle funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ sono, rispettivamente:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Si noti che entrambe le funzioni NON sono derivabili in 0, nonostante, ad esempio, $f(x)$ sia una funzione definita e continua in $x = 0$.

Un altro esempio di funzione definita e continua in 0, ma ivi non derivabile è la funzione $f(x) = |x|$. Infatti, facendo il limite del rapporto incrementale in $x = 0$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-0}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{+h}{h} &= +1 \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-0}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} &= -1 \end{aligned}$$

Quindi, poiché limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale sono diversi, allora il limite non esiste e la funzione NON è derivabile in $x =$. Si noti invece che essa lo è $\forall x > 0$ in cui $f'(x) = 1$ e $\forall x < 0$ in cui $f'(x) = -1$.

Il seguente teorema mostra che la continuità è condizione necessaria (ma non sufficiente) alla derivabilità.

Teorema 1.1 (Continuità e derivibilità). *Se f è una funzione derivabile in x allora f è continua in x.*

Proof. Dalla definizione di derivata abbiamo che esiste finito il limite del rapporto incrementale di f in un intorno di x:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

La condizione di continuità richiede che $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, ovvero che $\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = 0$. Nel nostro caso abbiamo:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)-f(x) = \lim_{h\to 0} h\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)\cdot\lim_{h\to 0} h = f'(x)\cdot 0 = 0.$$

Quindi $\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = 0$ e pertanto f è continua in x. □

Come per il calcolo dei limiti, la determinazione delle derivate per funzioni più complesse si basa sui seguenti teoremi.

Teorema 1.2. *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ ed f e g due funzioni derivabili in x, allora:*

(1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
(2) $(\alpha\cdot f)(x) = \alpha\, f(x) \Rightarrow (\alpha\cdot f)'(x) = \alpha\, f'(x)$;
(3) $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) \Rightarrow (f\cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$;
(4) $\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$, $g(x) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$;
(5) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$;

PROOF. La dimostrazione delle regole (1) e (2) è lasciata per esercizio. Dimostriamo la (3). Si consideri il limite del rapporto incrementale di $f \cdot g$ nel punto x:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} = \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + [f(x+h) - f(x)]g(x)}{h} = \\
=&\lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} + \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h}g(x) = \\
=&\lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) - f(x)]}{h}g(x) = \\
=&f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x).
\end{aligned}$$

Poiché la regola (4) può essere vista come un caso particolare della (5), in cui si ponga $f(x) = 1$, dimostriamo solo la (5). Anche in questo caso, calcoliamo il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \text{ (facendo il minimo comune multiplo)} \\
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\, g(x+h)\, g(x)} = \\
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\, g(x+h)\, g(x)} = \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - [g(x+h) - g(x)]f(x)}{h\, g(x+h)\, g(x)} = \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left\{ g(x)\frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} - \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} f(x) \right\} = \\
=&\frac{1}{[g(x)]^2} \left[\lim_{h\to 0} g(x)\, \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} - \lim_{h\to 0} f(x)\, \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \right] = \\
=&\frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}.
\end{aligned}$$

□

Utilizzando la regola di derivazione del prodotto, si può dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$p(x) = x^n \text{ ha come derivata } p'(x) = n\, x^{n-1}.$$

PROOF. Per la dimostrazione si può procedere per induzione matematica. Abbiamo già visto che

$$p(x) = x \text{ ha come derivata } p'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1.$$

Supponiamo la formula vera per n (ipotesi induttiva):

$$p(x) = x^n \text{ ha come derivata } p'(x) = n\,x^{n-1}$$

e dimostriamola per $n+1$. Abbiamo

$$p(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n.$$

Sfruttando la regola di derivazione del prodotto di due funzioni (nel nostro caso $f(x) = x$ e $g(x) = x^n$) e l'ipotesi induttiva, otteniamo:

$$p'(x) = 1 \cdot x^n + x \cdot (n \cdot x^{n-1}) = 1 \cdot x^n + n \cdot x^n = (n+1)x^n.$$

□

Utilizzando la regola (4) per funzioni reciproche, si può dimostrare che la regola appena vista vale anche nel caso in cui l'esponente sia un numero negativo:

$$p(x) = x^{-n} \text{ ha come derivata } p'(x) = -n\,x^{-n-1} = -n\,x^{-(n+1)}.$$

Esercizio 1.2
Si dimostri la regola appena vista in due modi diversi: 1) per induzione matematica e 2) sfruttando la regola (4) e la regola sopra dimostrata per la derivata di $p(x) = x^n$ con n positivo.

2. Notazione di Lagrange, notazione di Leibniz e derivate successive

Finora abbiamo utilizzato la notazione di Lagrange per indicare la derivata di una funzione. Un'altra notazione molto usata è la notazione introdotta da Leibniz che rende esplicita la variabile rispetto alla quale una funzione y viene derivata:

$$\frac{dy}{dx} \text{ se } y \text{ è funzione di } x,$$

$$\frac{dy}{dt} \text{ se } y \text{ è funzione di } t,$$

eccetera. Così, se $y = x^3$, scriveremo

$$\frac{dy}{dx} = 3\,x^2,$$

mentre, se $y = \frac{1}{t^2}$ scriveremo:

$$\frac{dy}{dt} = -2\,t^{-3} = -\frac{2}{t^3},$$

o, ancora, se $y = \sqrt{z}$ allora

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

La notazione con la **doppia d** può essere usata come prefisso dell'espressione che deve essere derivata. Ad esempio:

$$\frac{d}{dx}(x-2)^2 = 2\,(x-2); \text{ oppure } \frac{d}{dt}(t^2+2\,t-1) = 2\,t+2$$

Nella notazione di Leibniz, ad esempio, alcune delle regole di derivazione già viste si scrivono:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx};$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = \frac{-1}{[g(x)]^2}\frac{d}{dx}g(x) = \frac{1}{g^2}\,\frac{dg}{dx}.$$

Come osservato in procedenza, quando si deriva una funzione si ottiene una nuova funzione. Quest'ultima può essere a sua volta derivata così da ottenere la **derivata seconda**. Derivando ancora si ottiene la **derivata terza**, e così via. Nella notazione di Lagrange, se $f(x) = 4\,x^5$ si ha:

$f'(x) = 20\,x^4$; $\quad f''(x) = 80\,x^3$; $\quad f'''(x) = 240\,x^2$; $\quad f^{(4)}(x) = 480\,x$;

$f^{(5)}(x) = 480$ e, per $n \geq 6$, $f^(n)(x) = 0$.

Nella notazione di Leibniz si osserva che se y è funzione di x allora $\frac{dy}{dx}$ rappresenta la (funzione) derivata prima. La derivata seconda è data da

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Iterando, otteniamo che la derivata n-esima è denotata da

$$\frac{d^ny}{dx^n}$$

3. Derivazione delle funzioni composte

Vedremo adesso come derivare funzioni composte. In simboli una funzione composta è data da

$$(f \circ g)\,(x) = f\,[g(x)]\,.$$

Si noti che nella definizione di una funzione composta l'ordine con cui compaiono le funzioni f e g è importante: $(f \circ g)\,(x) = f\,[g(x)] \neq g\,[f(x)] = (g \circ f)\,(x)$.

Un teorema, che non dimostreremo, afferma che (nella notazione di Lagrange)

$$(f \circ g)'\,(x) = f'\,[g(x)] \cdot g'(x).$$

Enunciamo ora lo stesso teorema con la notazione di Leibniz. Se y è funzione di u, $y(u)$, e, a sua volta, u è una funzione di x, u(x), la funzione composta $y(u(x))$ può essere derivata rispetto ad x come segue:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Quindi la derivata di y rispetto ad x si ottiene moltiplicando la derivata di y rispetto ad u calcolata nel punto $u = u(x)$ per la derivata della funzione $u(x)$ nel punto x. Questa formula è nota anche come *chain rule.*

Esempio 3.1
La chain rule può essere utilizzata per dimostrare che la regola di derivazione delle potenze può essere estesa al caso in cui l'esponente della potenza sia un qualsiasi numero razionale:

$$p(x) = x^q \quad \Rightarrow p'(x) = q\, x^{q-1} \quad \text{con } q = \frac{m}{n}, \forall m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0.$$

Per la dimostrazione, innanzitutto scriviamo $p(x)$ in termine degli interi m ed n:

$$p(x) = x^q = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m .$$

Poniamo ora $y = x^{\frac{1}{n}}$. Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte a $p(y(x)) = (y(x))^m$ otteniamo:

$$p'(x) = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}$$

La funzione $p(y)$ è una potenza con esponente intero, quindi $\frac{dp}{dy} = m\, y^{m-1}$. Resta da determinare $\frac{dy}{dx}$. Abbiamo posto $y = x^{\frac{1}{n}}$. Allora $x = y^n$. Derivando ambo i membri della eguaglianza precedente risulta:

$$\frac{dx}{dx} = n\, y^{n-1}\frac{dy}{dx}.$$

Poiché $\frac{dx}{dx} = 1$, dalla precedente equazione possiamo ricavare $\frac{dy}{dx}$:

$$1 = n\, y^{n-1}\frac{dy}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n\, y^{n-1}}.$$

Quindi:

$$p'(x) = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = m\, y^{m-1}\frac{1}{n\, y^{n-1}} = \frac{m}{n}\, y^{m-1-n+1} = \frac{m}{n}\, y^{m-n} =$$
$$= \frac{m}{n}\,(x^{\frac{1}{n}})^{m-n} = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1} = q\, x^{q-1}.$$

Esempio 3.2
Si determini la derivata della funzione

$$y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 .$$

Possiamo sviluppare il quadrato e procedere con le regole di derivazione già apprese, oopure, preferibilmente utilizzare la regola di derivazione delle funzioni composte. Iniziamo da quest'ultima, considerando la funzione composta $y(t(x))$, con $y(t) = t^2$ e $t(x) = x + \frac{1}{x}$. Abbiamo:

$$y'(x) = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 2\,t\,\frac{dt}{dx} = 2\,t\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) =$$
$$= 2\,(x - x^{-1} + x^{-1} - x^{-3}) = 2\,(x - x^{-3}).$$

Vediamo ora che si può ottenere lo stesso risultato svolgendo prima il quadrato e poi derivando:

$$y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + x^{-2} + 2\,x\,x^{-1} = x^2 + x^{-2} + 2.$$

Allora:

$$y'(x) = 2\,x - 2x^{-3} = 2\,(x - x^{-3}).$$

In questo esercizio, potrebbe sembrare che svolgere i quadrati sia più semplice che utilizzare la chain rule e per certi versi lo è davvero. Si provi pero ad immaginare di voler derivare:

$$y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4$$

Con la chain rule otteniamo immediatamente:

$$y'(x) = 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^{4-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Si provi ora a sviluppare la quarta potenza del binomio e poi derivare.

Esercizio 3.1

Si determini attraverso la regola di derivazione delle funzioni composte la derivata delle seguenti funzioni:

$$y = (x^3 - 1)^2 \text{ e } y = (3\,x^2 - 2\,x + 5)^2.$$

4. Derivata di funzioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche

4.1. Derivata delle funzioni $\sin(x)$**,** $\cos(x)$**,** $\tan(x)$ **e** $\cot(x)$**.** Calcoliamo la derivata di $\sin(x)$ derivata risolvendo il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \lim_{h\to 0}\cos(x)\frac{\sin(h)}{h} = 0 + 1\ \cos(x).\end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x).$$

Lo studente dimostri, in maniera analoga, che:

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x).$$

Note le derivate delle funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$ possiamo facilmente calcolare la derivata di $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, sfruttando la regola di derivazione del rapporto tra funzioni:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right] = \frac{\cos(x)\cos(x)-(-\sin(x)\sin(x))}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},\ \text{oppure},\ 1+\tan^2(x).\end{aligned}$$

Allo stesso modo, lo studente calcoli

$$\frac{d}{dx}\cot(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right]$$

4.2. Derivata della funzione logaritmo. Stimiamo la derivata della funzione $\ln(x)$ calcolando il limite del rapporto incrementale:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \\
&= \lim_{h\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] = \\
&= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] = \left(\text{posto } t=\frac{h}{x}\right) = \\
&= \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\ln\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right] = \text{ (per uno dei limiti notevoli studiati) } = \\
&= \frac{1}{x}\ln(e) = \frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

Quindi la derivata della funzione $\ln(x)$ è:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}.$$

4.3. Derivata della funzione esponenziale. Calcoliamo la derivata della funzione e^x come limite del rapporto incrementale.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^x &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\,\frac{e^h-1}{h} = \\
&= e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \text{ (per uno dei limiti notevoli studiati) } = \\
&= e^x\cdot 1 = e^x.
\end{aligned}
$$

Quindi la derivata della funzione e^x è la funzione stessa:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

Si lascia allo studente di dimostrare che

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x\,\ln(a).$$

Suggerimento: si utilizzi la relazione che lega a^x ad e^x, $a^x = e^{x\ln(a)}$ e si sfrutti la regola di derivazione delle funzioni composte. Lo stesso approccio si utilizza per calcolare la derivata della seguente funzione, in cui si assume che $f(x)$ e $g(x)$ siano entrambe derivabili e che $f(x)>0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x)^{g(x)} =& \frac{d}{dx}e^{g(x)\log[f(x)]} = e^{g(x)\log[f(x)]}\frac{d}{dx}\left[g(x)\log[f(x)]\right] = \\
=& e^{g(x)\log[f(x)]}\left[g'(x)\log[f(x)] + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].
\end{aligned}
$$

5. Derivata della funzione inversa

Si consideri una funzione $f(x)$ biettiva e la sua funzione inversa $f^{-1}(y)$. Supponiamo che la funzione f sia derivabile in x e indichiamo con $f'(x)$ la sua derivata. Possiamo calcolare la derivata della funzione inversa f^{-1} nel punto $y = f(x)$ sfruttando la regola di derivazione delle funzioni composte. Infatti, per definizione di funzione inversa, abbiamo:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x.$$

Deriviamo ambo i membri di questa uguaglianza rispetto ad x e sfruttiamo la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{d}{dx}\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = \frac{d}{dx}x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dy}f^{-1} \cdot \frac{df}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dy}f^{-1} \cdot f'(x) = 1.$$

Da questa equazione possiamo ricavare $\frac{d}{dy}f^{-1}$. Infatti

$$\frac{d}{dy}f^{-1} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ricordando che $x(y) = f^{-1}(y)$, otteniamo:

$$\frac{d}{dy}f^{-1} = \frac{1}{f'(x(y))}.$$

Possiamo usare la regola di derivazione delle funzioni inverse per calcolare, ad esempio, la derivata della funzione $\ln(y)$ come derivata della funzione inversa di $y = e^x$. Abbiamo già visto che $\frac{d}{dx}e^x = e^x$. Allora:

$$\frac{d}{dy}\ln(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Esercizio 5.1
Disegnare il grafico della derivata di ciascuna delle funzioni disegnate di seguito.

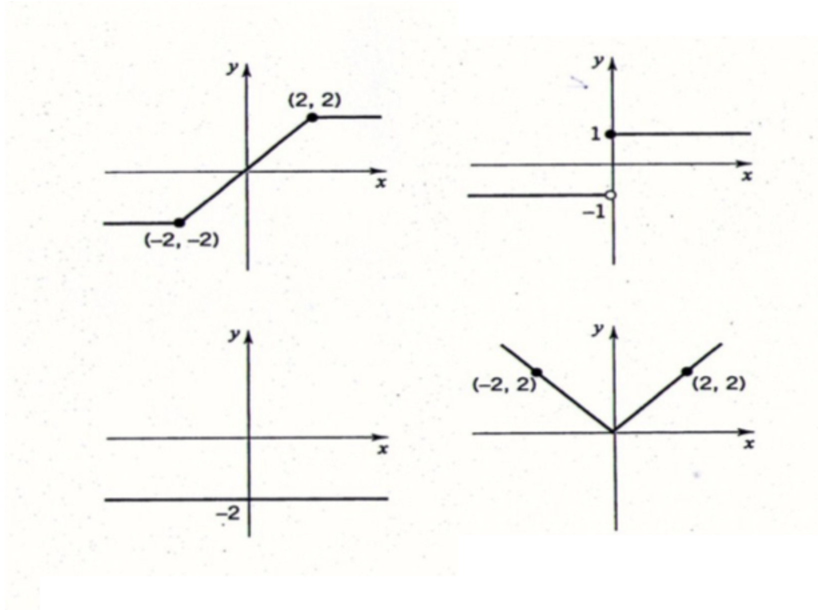

FIGURE 3. Grafico delle funzioni relative all'esercizio 5.1.

Esercizio 5.2

Derivare le seguenti funzioni:

(1) $f(x) = \frac{1}{1-2\,x}$
(2) $f(x) = (1+2\,x)^5$
(3) $f(x) = (x^5 - x^{10})^{20}$
(4) $f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3$
(5) $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^4$
(6) $f(t) = \left(\frac{1}{1+t}\right)^4$
(7) $f(x) = (x - x^3 + x^5)^4$
(8) $f(t) = (t - t^2)^3$
(9) $f(t) = (t^{-1} + t^{-2})^4$
(10) $f(x) = \left(\frac{4\,x+3}{5\,x-2}\right)^3$
(11) $f(x) = \left(\frac{3\,x}{x^2+1}\right)^4$
(12) $f(x) = [(2\,x+1)^2 + (x+1)^2]^3$
(13) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$

Esercizio 5.3
Derivare le seguenti funzioni

(1) $y = \cos^2 t$
(2) $y = \sin^2 t$
(3) $y = 3\,t^2 \tan t$
(4) $y = \sin^4(\sqrt{u})$
(5) $y = \tan(x^2)$
(6) $y = \cos(\sqrt{x})$

Esercizio 5.4
Calcolare la derivata $\frac{dy}{dx}$ delle seguenti funzioni composte:

(1) $y = \frac{1}{1+u^2}$, $u = 2\,x + 1$;
(2) $y = u + \frac{1}{u}$, $u = (3\,x + 1)^4$;
(3) $y = \frac{2\,u}{1-4\,u}$, $u = (5\,x^2 + 1)^4$;
(4) $y = u^3 - u + 1$, $u = \frac{1-x}{1+x}$.

Esercizio 5.5
Calcolare la derivata $\frac{dy}{dt}$ delle seguenti funzioni composte:

(1) $y = \frac{1-7\,u}{1+u^2}$, $u = x^2 + 1$, $x = 2\,t - 5$;
(2) $y = 1 + u^2$, $u = \frac{1-7\,x}{1+x^2}$, $x = 5\,t + 2$.

Esercizio 5.6
Determinare la derivata seconda $\frac{d^2y}{dx^2}$ delle seguenti funzioni:

(1) $y = \sin x$
(2) $y = \cos x$
(3) $y = \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$
(4) $y = \tan^3(2\,\pi\,x)$
(5) $y = \cos^3(2\,x)$
(6) $y = \cos(\sqrt{x})$
(7) $y = \sin^5(3\,x)$
(8) $y = \cot(4\,x)$
(9) $y = x^2\,\sin(3\,x)$
(10) $y = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$
(11) $y = \cos^2(x) + \sin^2(x)$

Esercizio 5.7

Calcolare le seguenti derivate di ordine superiore al primo:

(1) $\frac{d^4}{dx^4}(\sin x)$
(2) $\frac{d^4}{dx^4}(\cos x)$
(3) $\frac{d}{dt}\left[t^2\,\frac{d}{dt}(t\,\cos(3\,t))\right]$
(4) $\frac{d}{dt}\left[t\,\frac{d}{dt}(\cos(t^2))\right]$
(5) $\frac{d}{dx}\,[f(\sin(3\,x))]$
(6) $\frac{d}{dx}\,\{\sin[f(3\,x)]\}$

Esercizio 5.8

Determinare la funzione $y = f(x)$ tale che:

(1) $y'(x) = 4\,x^3 - x^2 + 4\,x$
(2) $y'(x) = x - \frac{2}{x^3} + 3$
(3) $y'(x) = 5\,x^4 + \frac{1}{x^5}$
(4) $y'(x) = 4\,x^5 - \frac{5}{x^4} - 2$