Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

10 - Massimi, minimi e flessi

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Pecorella, D. Provenzano e A. Consiglio

1. Introduzione

Prima di addentrarci nell'analisi dei valori estremi e dei flessi di una funzione, introdurremo alcuni teoremi propedeutici a questo argomento.

Ricordiamo qui per comodità la definizione di funzione crescente e decrescente in un intervallo I, poiché ne faremo ampio uso nella prossima sezione.

Definizione Sia f una funzione definita nell'intervallo aperto I. Diremo che f è

i: *crescente* sull'intervallo I se $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) < f(x_2)$. Diremo che f è *non decrescente* se $f(x_1) \leq f(x_2)$;

ii: *decrescente* sull'intervallo I se $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) > f(x_2)$. Diremo che f è *non crescente* se $f(x_1) \geq f(x_2)$.

2. Teoremi sulla derivabilità e continuità di funzioni

TEOREMA 2.1. *Sia f una funzione derivabile in c e continua in un intorno di c.*
Se $f'(c) > 0$, allora

$$\exists h_0 > 0 \,:\, \forall h :\, 0 < h < h_0 \text{ allora } f(c-h) < f(c) < f(c+h),$$

Se $f'(c) < 0$, allora

$$\exists h_0 > 0 \,:\, \forall h :\, 0 < h < h_0 \text{ allora } f(c-h) > f(c) > f(c+h).$$

In pratica il teorema sancisce che in un intorno sufficientemente piccolo di un punto in cui la funzione ammette derivata prima positiva (negativa), la funzione sarà crescente (decrescente).

TEOREMA 2.2 (di Rolle). *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$ e derivabile nell'insieme aperto (a,b). Se la funzione assume agli estremi dell'intervallo lo stesso valore:*

$$f(a) = f(b)$$

allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$, ossia interno al dominio, tale che

$$f'(c) = 0$$

DIMOSTRAZIONE. In virtù del teorema di Weierstrass, la funzione nell'intervallo $[a,b]$ ammette massimo e minimo assoluti. Si possono avere due casi: o il massimo e minimo sono raggiunti negli estremi oppure almeno uno di essi cade all'interno dell'intervallo (a,b). Nel primo caso, massimo assoluto e minimo assoluto coincidono e ciò può avvenire solo se la funzione f è costante, per cui $f'(c) = 0 \forall c \in (a,b)$. Nel secondo caso, almeno uno dei due cadrà all'interno dell'intervallo (a,b). Supponiamo, senza togliere generalità alla dimostrazione, sia il massimo assoluto $f(c)$ in corrispondenza del punto $c \in (a,b)$. La derivata $f'(c)$ esiste per ipotesi. Inoltre $f'(c)$ non può essere maggiore di zero in quanto, se lo fosse, $\exists h > 0$ tale che, per il teorema 2.1, $f(c-h) < f(c) < f(c+h)$, e quindi $f(c)$ non sarebbe un massimo. Lo stesso vale nell'ipotesi in cui $f'(c) < 0$, quindi l'unico valore che può assumere $f'(c)$ è zero. $\square$

Il teorema di Rolle può essere utilizzato per stabilire l'esistenza di una o più radici reali di un polinomio.

Esempio 2.1
Il polinomio cubico $p(x) = 2x^3 + 5x + 1$ ha almeno una radice reale (in realtà le soluzioni di un polinomio di terzo grado sono sempre tre, ma le altre due soluzioni potrebbero essere o reali oppure complesse coniugate).

Si tratta di stabilire se sono più di una (tre radici reali). Se fossero più di una si avrebbero due punti distinti a e b, con $a < b$ in cui $p(a) = p(b) = 0$ e, per Rolle, deve esistere $c \in (a, b)$ tale che $p'(c) = 0$. Se si dimostra che l'equazione $p'(c) = 0$ non ha soluzioni reali, allora $p(x)$ avrà solo una radice reale. Nel caso in questione

$$p'(c) = 6x^2 + 5 = 0$$

è impossibile per qualunque x. Ne consegue che $p(x)$ ha una sola radice reale.

Esempio 2.2
Si dimostri che l'equazione $6x^4 - 7x + 1 = 0$ non ha più di due radici reali distinte.

Si assuma che l'equazione abbia più di due radici reali distinte, per esempio, $x_1 < x_2 < x_3$, ordinate per convenienza. Per il teorema di Rolle devono allora esistere due punti $c_1 \in (x_1, x_2)$ e $c_2 \in (x_2, x_3)$ tali che $p'(c_1) = p'(c_2) = 0$ ove $p'(x) = 24x^3 - 7$. Si osservi che $p'(x) = 0$ ha una sola radice reale, quindi, $p(x)$ ha al più due radici distinte.

Teorema 2.3 (del valor medio o di Lagrange). *Sia f una funzione derivabile sull'intervallo aperto (a, b) e continua su $[a, b]$, allora esiste almeno un $c \in (a, b)$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione.La dimostrazione si effettua costruendo una funzione che soddisfi le condizioni del teorema di Rolle. Sia

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right]$$

Essa soddisfa le ipotesi di Rolle, infatti, è continua in $[a, b]$ perchè somma di funzioni continue ed è evidentemente derivabile in (a, b). Inoltre è facile vedere che $g(a) = g(b) = 0$. Pertanto esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$, ovvero

$$g'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] = 0$$

da cui l'asserto. $\square$

Graficamente, il teorema del valor medio postula l'esistenza di una o più rette parallele alla secante passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e tangente alla curva nel punto $(c, f(c))$. Il teorema di Rolle postula l'esistenza di uno o più punti in cui la tangente a f è parallela all'asse delle ascisse.

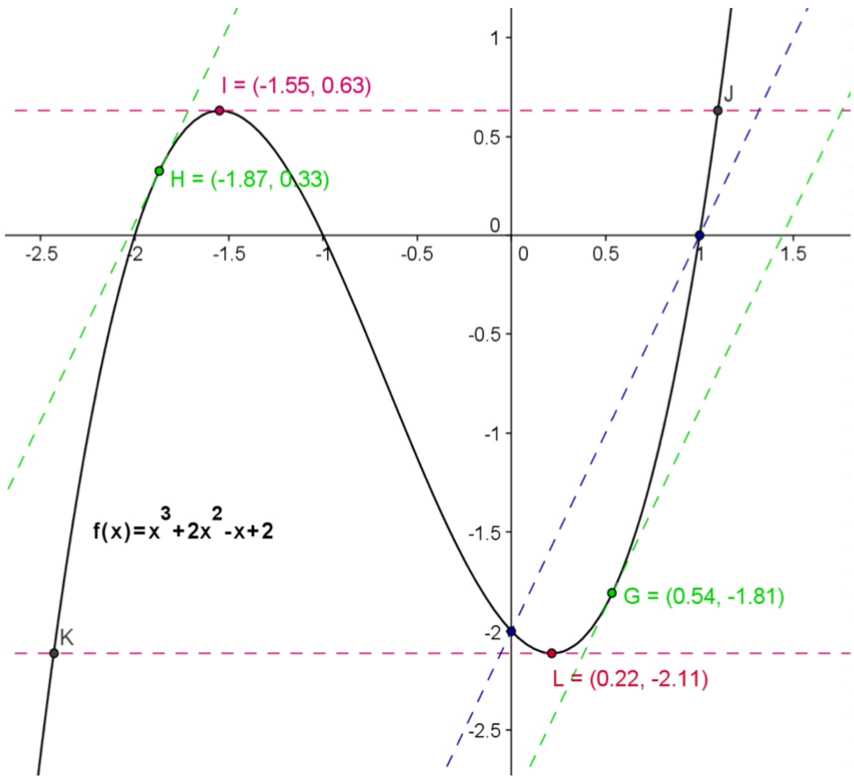

FIGURA 1. Grafico della funzione $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$

La funzione $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$ riportata in figura 1 ha due parallele all'asse delle ascisse nei punti I ed L. Infatti, $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$ ha due soluzioni, $c_1 = 0.22$ e $c_2 = -1.55$ tali che $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Si osservi che $f(x)$ ha tre radici reali distinte, pertanto vi saranno due intervalli, $(-2, -1)$ e $(-1, 1)$, tali che $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Per il teorema del valor medio, deve esistere un punto nell'intervallo individuato dalla secante passante per i punti $(1, 0)$ e $(0, -2)$. Il punto in questione si ottiene risolvendo l'equazione del teorema del valor medio ossia

$$3x^3 + 4x - 1 = \frac{0 - (2)}{1 - 0} = 2$$

Si osservi che la suddetta equazione ha una sola soluzione nell'intervallo $[0, 1]$, il punto $G = (0.54, -1.81)$. Se invece si considerasse la secante passante per i punti $(-3, -8)$ (non mostrato nella figura) e $(1, 0)$, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è sempre uguale a 2 e le due soluzioni dell'equazione $f'(x) = 2$ individueranno due punti tali che $f'(c_1) = f'(c_2) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (in particolare il secondo punto è $H = (-1.87, 0.33)$).

Esempio 2.3
Sia f derivabile in $(1, 4)$ e continua in $[1, 4]$, con $f(1) = 2$. Si ipotizzi inoltre che $2 \leq f'(x) \leq 3$ $\forall x \in (1, 4)$. Qual'è il valore minimo che può assumere $f(4)$?
Per il teorema del valor medio $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$ da cui $f(4) = 2 + 3f'(c)$. Poichè $f'(x) \geq 2$, avremo che $f(4) \geq 2 + 2 \cdot 3 = 8$. Poichè $f'(x) \leq 3$, avremo che $f(4) \leq 2 + 3 \cdot 3 = 11$. Quindi il valore minimo che può raggiungere $f(4)$ è 8.

Si osservi che una funzione potrebbe essere crescente in una parte del suo dominio e decrescente in un'altra. Per esempio, $f(x) = x^2$ è crescente su $(0, \infty)$ e decrescente su $(-\infty, 0)$.

Teorema 2.4. *Sia f una funzione derivabile sull'insieme aperto I:*
i: *se $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, allora $f(x)$ è crescente su I;*
ii: *se $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, allora $f(x)$ è decrescente su I;*
iii: *se $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, allora $f(x)$ è costante su I.*

Dimostrazione.Dimostriamo il caso (**i**). Per il teorema del valor medio, esiste almeno un $c \in I$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

con $x_1 < x_2$. Per ipotesi $f'(x) > 0$ e quindi $f'(c) > 0$, per cui

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

Tale frazione è maggiore di zero se il numeratore è maggiore di zero, ossia $f(x_2) > f(x_1)$, pertanto la funzione è crescente. □
Si osservi che la (**i**) e la (**ii**) sono condizioni sufficienti, ma non necessarie (la funzione $f(x) = x^3$ è crescente su $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$), mentre la (**iii**) è anche necessaria, ossia vale la doppia implicazione:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f \text{ è costante}$$

Esempio 2.4
Determinare in quali intervalli la funzione

$$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 22x^2 - 24x + 6$$

è crescente o decrescente. Si osservi che la $f(x)$ è definita, continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. La sua derivata è

$$f'(x) = 4x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 44x - 24 = 4(x+2)(x-1)^2(x-3)$$

Vediamo qual'è il segno di $f'(x)$. In particolare

$(x-3)$	......	......	......	_____
$(x-1)^2$	_____	_____	_____	_____
$(x+2)$	......	_____	_____	_____
	$+++$	$---$	$---$	$+++$
	-2	1	3	
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Quindi $f(x)$ è crescente su $(-\infty, -2)$, decrescente su $(-2, 3)$ e crescente su $(3, +\infty)$.

Esempio 2.5
Determinare la monotonia della funzione $f(x) = x - 2\sin x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
Studiamo il segno della $f'(x) = 1 - 2\cos x$

$$1 - 2\cos x = 0; \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

Il coseno è uguale ad $\frac{1}{3}$ per $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{5}{3}\pi$. Pertanto, $1-2\cos x > 0$ per $\cos x < \dfrac{1}{2}$. si ricorda che in $x = 0$ il $\cos x = 1$; dopodichè il coseno decresce ed è maggiore di $\frac{1}{2}$ fino a $\frac{\pi}{3}$, quindi, in $(0, \frac{\pi}{3})$, $f'(x) < 0$ e quindi la funzione decresce. Da $\frac{\pi}{3}$ fino a $\frac{5}{3}\pi$ avremo $f'(x) > 0$, ed infine in $\frac{5}{3}\pi, 2\pi)$, $f'(x) < 0$.

$-$	$---$	$\circ$	$+++$	$\circ$	$---$	
0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5}{3}\pi$		2π
	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Teorema 2.5. *Sia I un intervallo aperto. Se $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in I$, allora f e g differiscono per una costante.*

Possiamo illustrare il teorema 2.5 considerando il seguente esempio.

Esempio 2.6
Sia $f'(x) = 6x^2 - 7x - 5$ $\forall x \in I$ e $f(2) = 1$. Non è difficile verificare

che:
$$\frac{d}{dx}\left(2x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 5x\right) = 6x^2 - 7x - 5.$$
Quindi, se $g'(x) = 6x^2 - 7x - 5$, allora $f(x) = g(x) + c$, pertanto
$$f(x) = 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 5x + c$$
Per determinare c basta risolvere l'equazione
$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - \frac{7}{2}2^2 - 5 \cdot 2 + c = 1$$
da cui $c = 9$. In figura 2 sono riportate $f(x)$ e $g(x)$. Si osservi che le pendenze delle tangenti sono identiche in ogni punto, ad esempio in $x = -1$.

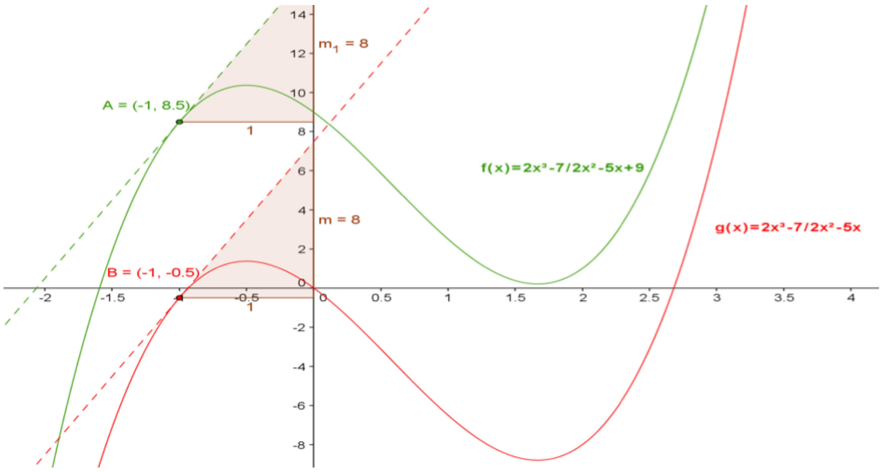

FIGURA 2. $f(x) = 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 5x + 9$ e $g(x) = 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 5x$

Definizione Sia f una funzione e c un punto interno di $D(f)$. La funzione f ha un *massimo locale* in c se $\exists\, \delta > 0$ tale che
$$f(c) \geq f(x) \ \ \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$$
La funzione f ha un *minimo locale* in c se $\exists\, \delta > 0$ tale che
$$f(c) \leq f(x) \ \ \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$$

TEOREMA 2.6. *Sia f una funzione e $c \in D(f)$ un punto interno al suo dominio. Se f ha un minimo o massimo locale in c allora $f'(c) = 0$ oppure $f'(c)$ non esiste.*

DIMOSTRAZIONE.Per ipotesi c è un massimo oppure un minimo. Se fosse $f'(c) > 0$, allora $\exists\, \delta > 0$ tale che
$$f(c - \delta) < f(c) < f(c + \delta)$$

Viceversa, se fosse $f'(c) < 0$, allora $\exists\ \delta > 0$ tale che

$$f(c-\delta) > f(c) > f(c+\delta)$$

In entrambi i casi, si ottiene un risultato che contraddice l'ipotesi che in c la funzione ha un massimo o minimo locale, quindi l'unico valore che può assumere $f'(c)$ è zero, oppure, $f'(c)$ non esiste. Si osservi che $f'(c) = 0$ è una condizione necessaria ma non sufficiente, ovvero, potrebbero esistere dei punti in cui la funzione ha derivata prima uguale a zero ma in quei punti non ci sono massimi o minimi. In termini logici vale l'implicazione:

$$c \text{ è un massimo (minimo)} \Rightarrow\ f'(c) = 0 \text{ oppure } \nexists$$

Non è vero il contrario,

$$f'(c) = 0 \text{ oppure } \nexists \not\Rightarrow c \text{ è un massimo (minimo)}$$

$\square$

Definizione Un punto interno $c \in D(f)$ è detto *punto critico* o *stazionario* se $f'(c) = 0$ oppure $f'(c)\ \nexists$.

Il teorema suvvisto permette di "isolare" i punti che possono assumere massimi o minimi. Questa condizione è anche detta *condizione del primo ordine*.

Esempio 2.7
Determinare i punti critici della funzione $f(x) = 3 - x^2$.
Dalla definizione di punto critico, sappiano che i valori di x per cui $f'(x) = 0$ oppure $\nexists$ sono punti critici, quindi

$$f'(x) = -2x = 0 \quad \text{per } x = 0$$

Quindi, $x = 0$ è un punto critico.

Esempio 2.8
Sia $f(x) = |x+1| + 2$. Determinare i punti critici.
Si osservi che

$$f(x) = \begin{cases} x+1+2 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -(x+1)+2 & \text{se } x+1 < 0 \end{cases}$$

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > -1 \\ -1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

I punti critici vanno ricercati dove si annulla la derivata prima o dove la derivata prima non esiste. In questo caso $f'(x) \neq 0$ eccetto che in $x = -1$. Invero, in $x = -1$ la derivata prima non esiste, quindi $x = -1$ è un punto critico.

Esempio 2.9

Determinare i punti critici della funzione $f(x) = |x^2 - 2|$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se} \quad x^2 - 2 \geq 0 \\ -(x^2 - 2) & \text{se} \quad x^2 - 2 < 0 \end{cases}$$

ossia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se} \quad x \leq -\sqrt{2} \text{ oppure } x \geq \sqrt{2} \\ -(x^2 - 2) & \text{se} \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

La derivata prima vale

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x < -\sqrt{2} \text{ oppure } x > \sqrt{2} \\ -2x & \text{se} \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

In questo caso, $f'(x) = 0$ per $x = 0$, inoltre, in $x = \mp\sqrt{2}$ la derivata $f'(x)$ non esiste. Quindi i punti critici sono $x = 0$ e $x = \mp\sqrt{2}$. A tal fine si osservi la figura 3.

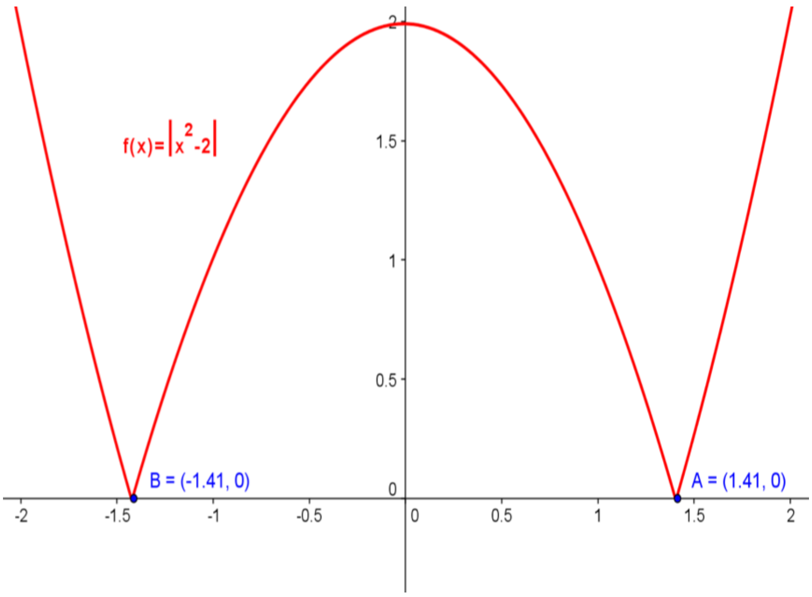

FIGURA 3. Punti critici della funzione $f(x) = |x^2 - 2|$

Esempio 2.10

Determinare i punti critici della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Si osservi che $f(x)$ è definita in $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ e che anche $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ è definita sullo stesso dominio. In $x = 1$ $f'(x)$ non esiste, ma $x = 1$ non è un punto critico in quanto non è un punto interno per $f(x)$.

Il seguente teorema fornisce le condizioni per stabilire se un punto critico è un massimo oppure un minimo.

TEOREMA 2.7. *Sia c un punto critico di f e sia f una funzione continua in c. Se $\exists\, \delta > 0$ tale che:*

i: $f'(x) > 0$, $\forall x \in (c-\delta, c)$ *e* $f'(x) < 0$, $\forall x \in (c, c+\delta)$, *allora* $f(c)$ *è un* massimo locale

ii: $f'(x) < 0$, $\forall x \in (c-\delta, c)$ *e* $f'(x) > 0$, $\forall x \in (c, c+\delta)$, *allora* $f(c)$ *è un* minimo locale

iii: *$f'(x)$ ha lo stesso segno su $(c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$, allora $f(c)$ non è un estremo locale (ossia né un massimo, né un minimo).*

ATTENZIONE! Il teorema appena enunciato può essere utilizzato solo se la funzione è continua in c. Inoltre, la condizione $f'(c) = 0$ oppure $f'(c) \nexists$ è necessaria, ma non sufficiente. Si considerino i casi mostrati nel prossimo esempio.

Esempio 2.11

$$(i)\ f(x) = \begin{cases} 7 - 2x & \text{se} \quad x \leq 2 \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{4}x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases} \qquad (ii)\ g(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 5 - x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Nel caso (i), in $x = 2$, $f'(x)$ non esiste, la funzione è continua in $x = 2$. La funzione non assume nè massimo, nè minimo in quanto $f'(x) < 0$ in $(2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta)$.

Per quanto riguarda il caso (ii), $f'(x)$ in $x = 1$ non esiste e, sebbene $f'(x) > 0$ in $(1-\delta, 1)$ e $f'(x) < 0$ in $(1, 1+\delta)$, in $x = 1$ la funzione non è continua e quindi non possiamo dire nulla in base al teorema, visto che esso NON può essere applicato. Come si vede dalla figura 4, tuttavia, il punto $x = 1$ è un punto di massimo (locale e assoluto).

Esempio 2.12

Determinare gli estremi delle seguenti funzioni

$$(i)\ f(x) = x^4 - 2x^3; \quad (ii)\ g(x) = 2x^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}; \quad (iii)\ h(x) = |x^2 - 2|$$

i: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0$; $4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3) = 0$; i punti critici sono $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$. Studiamo il segno della derivata prima:

$$\begin{array}{ccccc} - - - & \circ & - - - & \circ & + + + \\ \hline & 0 & & \frac{3}{2} & \\ \searrow & & \searrow & \text{min} & \nearrow \end{array}$$

Quindi in $x = 0$ non abbiamo estremi (vedremo in seguito che $f(0)$ è un flesso). Mentre, in $x = \frac{3}{2}$ si ha un minimo. In particolare $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{27}{16}$.

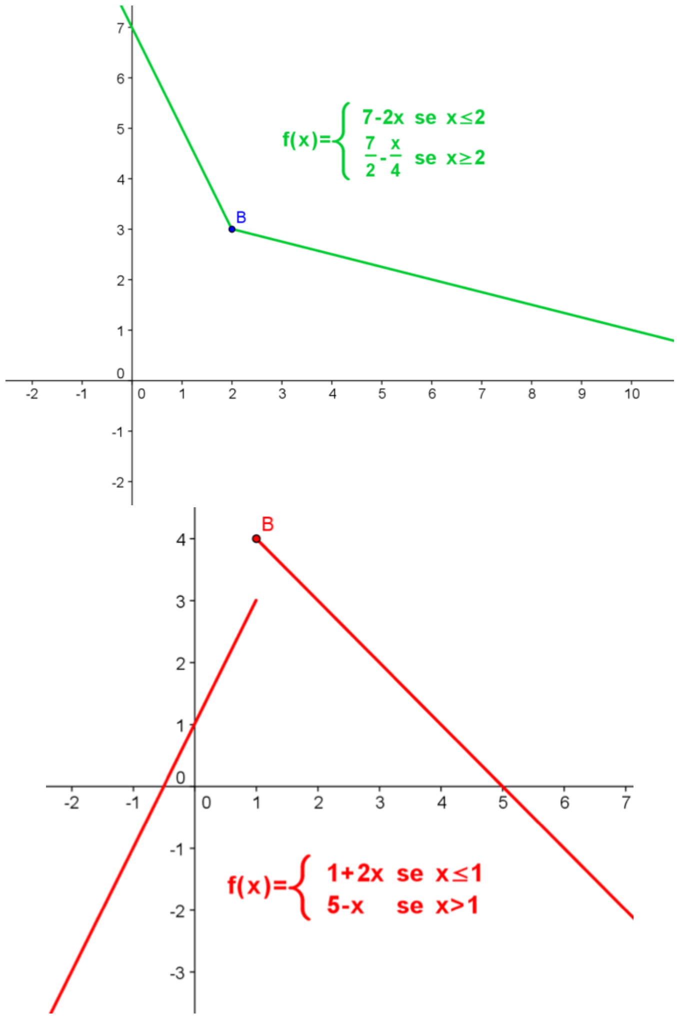

FIGURA 4. Punti critici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ dell'esempio 2.11

ii: $g'(x) = \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+1) = 0$. Si osservi che in $x = 0$, $g'(x)$ non esiste e che $g'(x)$ si annulla in $x = -1$. Pertanto,

$$\begin{array}{ccccc} +++ & \circ & --- & \nexists & +++ \\ \hline & -1 & & 0 & \\ \nearrow & \text{max} & \searrow & \text{min} & \nearrow \end{array}$$

Dalla figura 5 si evince che in $x = 0$ la funzione assume un minimo.

iii: Come già visto, per $h(x) = |x^2 - 2|$ abbiamo che

$$h'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x < -\sqrt{2} \text{ oppure } x > \sqrt{2} \\ -2x & \text{se} \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

e $h'(x) = 0$ in $x = 0$, mentre, $h'(x)$ non esiste in $x = \mp\sqrt{2}$. Studiamo il segno di $h'(x)$. Se $x < -\sqrt{2}$ e $x > \sqrt{2}$, allora $f'(x) = 2x$, e quindi per $x < -\sqrt{2}$, $f'(x) < 0$ mentre per $x > \sqrt{2}$, $f'(x) > 0$. Se $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, allora $f'(x) = -2x$, quindi, per $-\sqrt{2} < x < 0$, $f'(x) > 0$ e per $0 < x < \sqrt{2}$, $f'(x) < 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
--- & \nexists & +++ & \circ & --- & \nexists & +++ \\
\hline
 & -\sqrt{2} & & 0 & & \sqrt{2} & \\
\searrow & \text{min} & \nearrow & \text{max} & \searrow & \text{min} & \nearrow
\end{array}$$

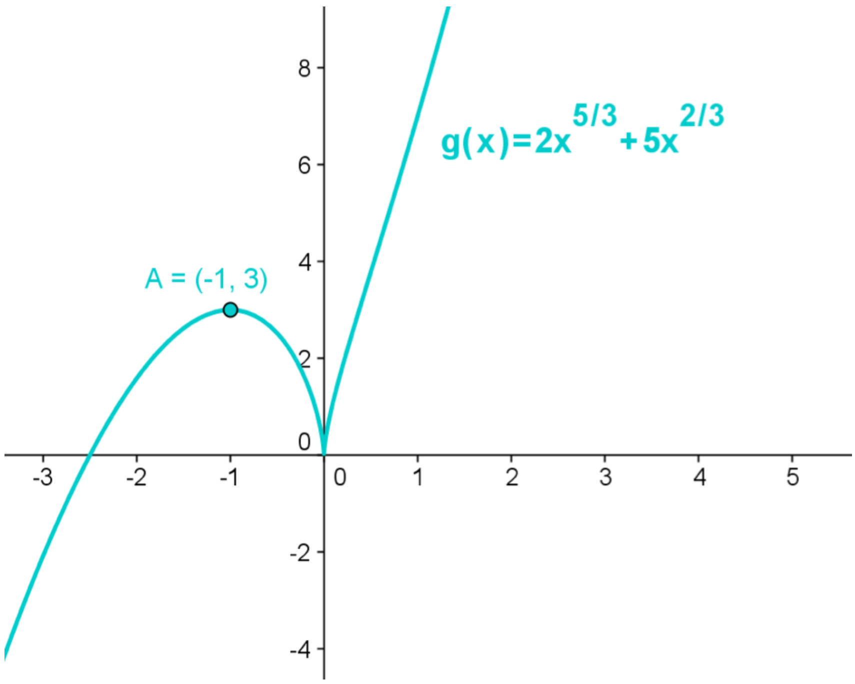

FIGURA 5. Punti critici della funzione $g(x) = 2x^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}$

Vi sono casi in cui è difficile determinare il segno di f' nell'intorno del punto critico. Inoltre, è importante fornire una condizione sufficiente affinchè un punto critico possa essere identificato come un massimo o un minimo. Questa condizione si basa sullo studio del segno della derivata seconda$f''(x)$ e prende il nome di *condizione del secondo ordine.*

TEOREMA 2.8 (Test della derivata seconda). *Sia* $f'(c) = 0$ *e si ipotizzi che esiste* $f''(c)$. *Allora:*

i: *se* $f''(c) > 0$, $f(c)$ *è un* minimo locale
ii: *se* $f''(c) < 0$, $f(c)$ *è un* massimo locale

ATTENZIONE! Nulla si può concludere se $f''(c) = 0$.

Un altro aspetto importante da sottolineare è che il test della derivata seconda è molto meno generale di quello della derivata prima. Invero, il test della derivata prima può essere utilizzato anche in punti c dove la funzione non è derivabile (sempre che f sia continua in c). Il test della derivata seconda richiede che f sia due volte derivabile in c, ed anche in questi casi il test fornisce dei risultati se $f''(c) \neq 0$. Si osservi che se $f''(c) = 0$ non possiamo concludere che $f(c)$ non sia estremo.

Esempio 2.13
Siano date le funzione $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ e $h(x) = -x^4$. Esse hanno un punto critico in $c = 0$. Se applichiamo il test della derivata seconda osserviamo che $f''(x) = 6x$ con $f''(0) = 0$; $g''(x) = 12x^2$ con $g''(0) = 0$; $h''(x) = -12x^2$ con $h''(0) = 0$. Nel primo caso, $f(x)$ in $c = 0$ non ha nè massimo nè minimo; nel secondo caso, $g(x)$ assume un minimo in $x = 0$; infine, nel terzo caso, $h(x)$ assume in $x = 0$ un massimo. Lo studente verifichi che il test della derivata prima permette di giungere alle tre conclusioni senza ispezione dei grafici delle tre funzioni.

Vediamo adesso, alcuni esempi.

Esempio 2.14
Determinare gli estremi delle seguenti funzioni:

$$(i)\;\; f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5; \;\; g(x) = \sin x - \sin x^2 \;\text{ in }\; [0, 2\pi]$$

(i) Calcoliamo le derivate, prima e seconda di $f(x)$:
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ e $f''(x) = 12x - 6$. Poniamo a zero la derivata prima al fine di determinare i punti critici. Possiamo fattorizzare $f'(x)$ ottenendo $6(x-2)(x+1) = 0$ da cui i punti critici risultano essere $x = 2$ e $x = -1$. Per tali punti $f''(2) = 18 > 0$ e $f''(-1) = -18 < 0$. Pertanto,$f(2)$ è un minimo mentre $f(-1)$ è un massimo.
(ii) $g'(x) = \cos x - 2\sin x \cos x = \cos x(1 - 2\sin x)$ e $g''(x) = -\sin(x) + 2\sin^2 x - 2\cos^2 x$. I punti critici si ottengono ponendo a zero la derivata prima. Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ il $\cos x = 0$ in $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$, inoltre, $1 - 2\sin x = 0$ se $\sin x = \frac{1}{2}$ ossia $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5}{6}\pi$. Valutiamo tali punti critici con il test sulla derivata seconda: $g''(\frac{\pi}{2}) = 1$ ossia punto di minimo; $g''(\frac{3}{2}\pi) = 3$ ossia punto di minimo; $g''(\frac{\pi}{6}) = -1.5$ ossia punto di massimo; $g''(\frac{5}{6}\pi) = -1.5$ ossia punto di massimo.

3. Concavità e convessità

Lo studio del segno della derivata prima permette l'individuazione dei valori estremi di una funzione. Vedremo adesso come lo studio del

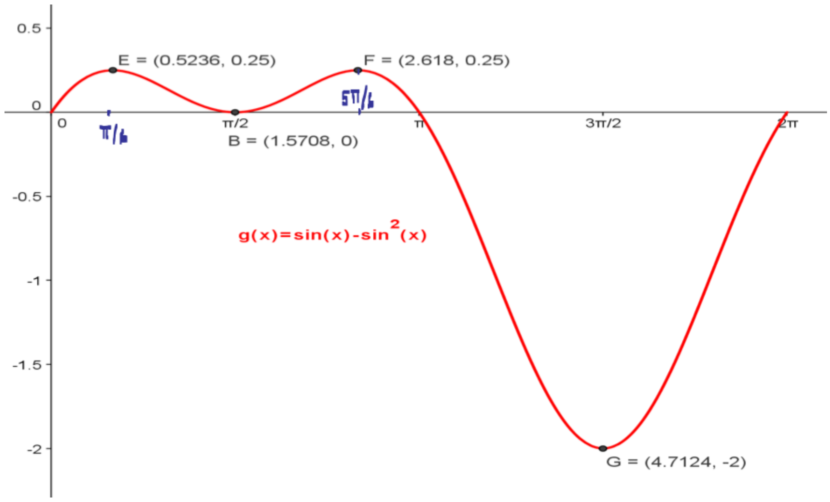

FIGURA 6. Grafico della funzione $g(x) = \sin x - \sin x^2$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$—cfr. esempio 2.14.

segno della derivata seconda permetta di stabilire in quali intervalli la funzione sia **concava** o **convessa**.

Definizione Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b).

Diremo che f è **convessa** se $\forall\, c \in (a, b)$ il grafico di f sta al di **sopra** della retta tangente alla funzione nel punto $(c, f(c))$.

Diremo che f è **concava** se $\forall\, c \in (a, b)$ il grafico di f sta al di **sotto** della retta tangente alla funzione nel punto $(c, f(c))$.

Si noti che, nella definizione di funzione concava e convessa la necessità che la funzione sia derivabile nell'intervallo aperto (a, b) segue dalla necessità di poter definire la retta tangente ad f in ogni punto di tale intervallo.

Se si indica con $t(x) = f(c) + f'(c)\,(x - c)$ la retta tangente ad f nel punto $(c, f(c))$, la funzione è convessa nell'intervallo (a, b) se $\forall c \in (a, b)$ e, dato c, $\forall x \in [a, b]$ si ha che:

$$f(x) \geq t(x) = f(c) + f'(c)\,(x - c).$$

In modo analogo, la funzione sarà concava in (a, b) se $\forall c \in (a, b)$ e, dato c, $\forall x \in [a, b]$ risulta:

$$f(x) \leq t(x) = f(c) + f'(c)\,(x - c).$$

Nella figura 7 è riportato il grafico di una funzione **convessa** nell'intervallo $(-\infty, 0.29)$, **concava** nell'intervallo $(0.29, 1.71)$ e (ancora) convessa nell'intervallo $(1.71, \infty)$. Si noti che nei punti F e G in figura, di ascissa 0.29 e 1.71, rispettivamente, avviene il cambiamento da concava a convessa e viceversa. In tali punti, che prendono il nome di **punti di**

flesso la funzione NON è né concava né convessa.

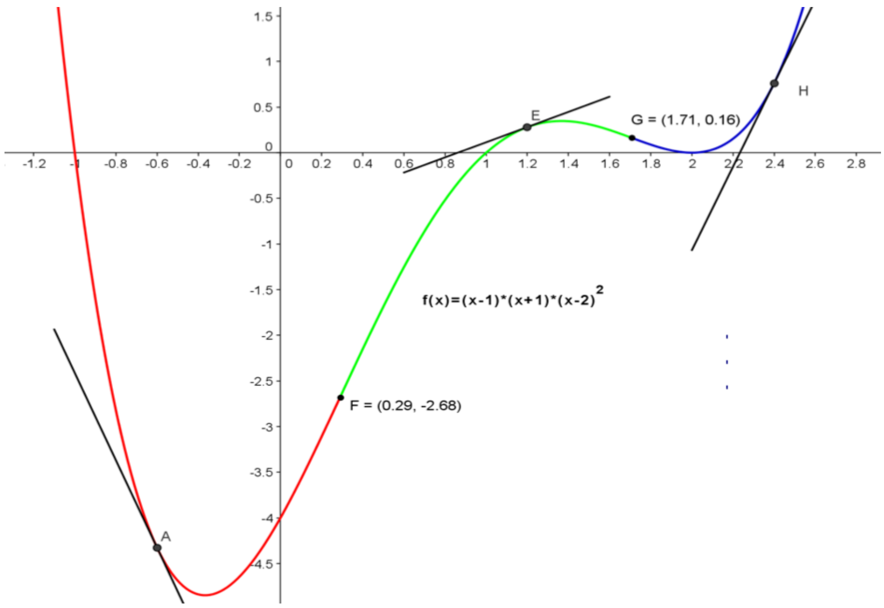

FIGURA 7. Grafico di una funzione **convessa** nell'intervallo $(-\infty, 0.29)$, **concava** nell'intervallo $(0.29, 1.71)$ e (ancora) convessa nell'intervallo $(1.71, \infty)$

Definizione Un punto $c \in (a, b)$ si dice **punto di flesso** per la funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ se $\exists \delta > 0$ tale che f risulti convessa nell'intervallo $(c - \delta, c)$ e concava nell'intervallo $(c, c + \delta)$, o viceversa.

Il seguente teorema fornisce un metodo per valutare, senza tracciarne il grafico, la convessità o concavità di una funzione in un dato intervallo.

TEOREMA 3.1. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f''(x)$ esista $\forall x \in (a, b)$.*

(1) *Se $f''(x) > 0\ \forall x \in (a, b)$ allora la funzione è convessa su (a, b).*
(2) *Se $f''(x) < 0\ \forall x \in (a, b)$ allora la funzione è concava su (a, b).*

DIMOSTRAZIONE.Si ipotizzi che $f''(x) < 0\ \forall x \in (a, b)$. Dimostriamo che f è concava su (a,b), ossia, dimostriamo che $\forall c \in (a, b)$ e, dato c, $\forall x \in (a, b)$ risulta $f(x) \leq f(c) + f'(c)\,(x - c)$ e quindi:

$$[f(x) - f(c)] - f'(c)\,(x - c) \leq 0 \tag{1}$$

Notiamo che il membro sinistro di questa diseguaglianza si annulla in $x = c$. Quindi dimostrare che $[f(x) - f(c)] - f'(c)\,(x - c) \leq 0$ è equivalente a dimostrare che la funzione $\phi(x) = [f(x) - f(c)] - f'(c)\,(x - c)$ ha un massimo in $x = c$. Notiamo che $\phi(x)$ è derivabile due volte in (a, b) poiché lo è, per ipotesi, $f(x)$. Inoltre, calcolando le derivate di $\phi(x)$, si ha:

$$\phi'(x) = f'(x) - f'(c) \ \ \Rightarrow \phi'(c) = 0$$

e

$$\phi''(x) = f''(x) \ \ \Rightarrow \phi''(c) = f''(c)$$

La prima delle due equazioni precedenti ci dice che c è un punto critico per $\phi(x)$ e la seconda equazione, tenuto conto che per ipotesi $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a, b)$, ci dice che $\phi''(c) = f''(c) < 0$. Dunque c è un punto di massimo per $\phi(x)$, per il teorema sulle condizioni sufficienti perché un punto sia minimo o massimo locale, e questo è quanto volevasi dimostrare. □

TEOREMA 3.2. *Se il punto $(c, f(c))$ è un punto di flesso allora $f''(c) = 0$ oppure $f''(c)$ non esiste.*

Come per i punti critici, il teorema precedente fornisce una condizione necessaria ma non sufficiente:

$(c, f(c))$ è un punto di flesso $\quad\Rightarrow\quad f''(c) = 0$ o $f''(c)$ non esiste.

Si noti che NON è sempre vera l'implicazione inversa (per esempio la funzione $y = x^4$ ammette derivata seconda che si annulla in $x = 0$, ma il punto (0,0) non è un flesso).

Esempio 3.1

Determinare gli eventuali punti di flesso, nonché gli intervalli di concavità e convessità delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = x^3 - 6\,x^2 + 3\,x + 1;$

(ii) $g(x) = 3\,x^{\frac{5}{3}} - 5\,x;$

(iii) $h(x) = x + \cos(x)$ in $[0, 2\pi]$.

(i) Determiniamo $f'(x)$ e $f''(x)$. Queste sono, rispettivamente, $f'(x) = 3\,x^2 - 12\,x + 3$ e $f''(x) = 6\,x - 12$. Si osservi che $f''(x) = 0$ per $x = 2$. Tramite lo studio del segno di $f''(x)$ riportato in Fig.8 possiamo individuare in quale intervallo $f(x)$ è convessa e in quale è concava. In particolare, si ottiene che $f(x)$ è concava in $(-\infty, 2)$ e convessa in $(2, \infty)$. Il punto $(2, f(2))$ è un punto di flesso.

(ii) Le derivate prima e seconda di $g(x)$ sono: $g'(x) = 5\,x^{\frac{2}{3}} - 5$ e $g''(x) = \frac{10}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}$. La derivata seconda non si annulla mai ed è discontinua in $x = 0$. Questo è dunque un potenziale punto di flesso. In Fig.9 è riportato lo studio del segno di $g''(x)$, da cui si evince che $g(x)$ è concava in $(-\infty, 0)$ e convessa in $(0, \infty)$.

(iii) Le derivate di $h(x)$ sono: $h'(x) = 1 - \sin(x)$ e $h''(x) = -\cos(x)$. In $[0, 2\pi]$ la funzione coseno si annulla in $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$, che quindi sono due potenziali punti flesso. Lo studio del segno di $h''(x)$ riportato in figura 10 mostra che, effettivamente, essi sono entrambi dei flessi.

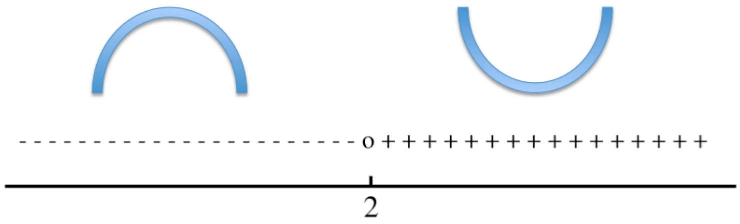

Figura 8. Concavità e convessità della funzione $f(x) = x^3 - 6\,x^2 + 3\,x + 1$.

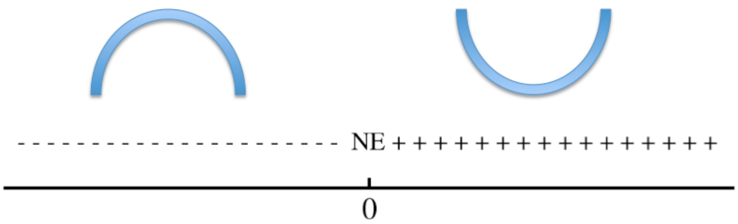

Figura 9. Concavità e convessità della funzione $g(x) = 3\,x^{\frac{5}{3}} - 5\,x$.

Inoltre si osserva che la $h(x)$ è concava nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$, convessa in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ e ancora concava per $x > \frac{3}{2}\pi$.

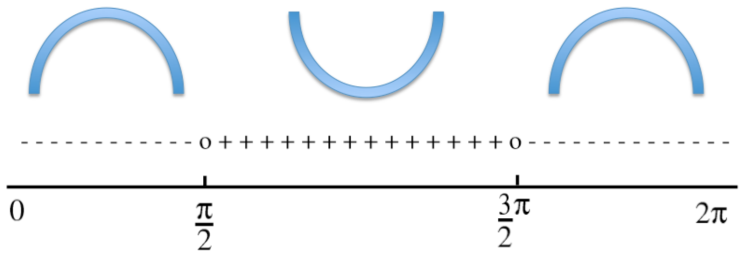

Figura 10. Concavità e convessità della funzione $h(x) = x + \cos(x)$.

Lo studente determini gli eventuali punti di massimo e minimo di $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$.
3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
4. $f(x) = (x - 3)^3$.
5. $f(x) = x^3(1 + x)$.
6. $f(x) = x(x + 1)(x + 2)$.
7. $f(x) = (x + 1)^4$.
8. $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.
9. $f(x) = \frac{1}{|x - 2|}$.
10. $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$.
11. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.
12. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.
13. $f(x) = |x^2 - 5|$.
14. $f(x) = x^2(1 + x)^2$.
15. $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$.
16. $f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$.
17. $f(x) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{2 + x^2}}$.
18. $f(x) = |x + 1||x - 2|$.
19. $f(x) = x - \cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi$.
20. $f(x) = x + \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$.
21. $f(x) = \cos 2x + 2\cos x, \quad 0 \le x \le \pi$.
22. $f(x) = \cos^2 x, \quad 0 \le x \le \pi$.
23. $f(x) = \sqrt{3}x - \cos 2x, \quad 0 \le x \le \pi$.
24. $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x, \quad 0 \le x \le \pi$.

FIGURA 11. ESERCIZIO 1 (di approfondimento): Determinare gli intervalli in cui la $f(x)$ è crescente e decrescente.

1. $f(x) = x^3 + 3x - 2$.
2. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 6$.
3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
4. $f(x) = x^2 - \frac{3}{x^2}$.
5. $f(x) = x^2(1 - x)$.
6. $f(x) = (1 - x)^2(1 + x)$.
7. $f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$.
8. $f(x) = \frac{2 - 3x}{2 + x}$.
9. $f(x) = \frac{2}{x(x + 1)}$.
10. $f(x) = |x^2 - 16|$.
11. $f(x) = x^3(1 - x)^2$.
12. $f(x) = \left(\frac{x - 2}{x + 2}\right)^3$.
13. $f(x) = (1 - 2x)(x - 1)^3$.
14. $f(x) = (1 - x)(1 + x)^3$.
15. $f(x) = \frac{x^2}{1 + x}$.
16. $f(x) = x\sqrt[3]{1 - x}$.
17. $f(x) = x^2\sqrt[3]{2 + x}$.
18. $f(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 2}$.
19. $f(x) = |x - 3| + |2x + 1|$.
20. $f(x) = x^{7/3} - 7x^{1/3}$.
21. $f(x) = x^{2/3} + 2x^{-1/3}$.
22. $f(x) = \frac{x^3}{x + 1}$.
23. $f(x) = \sin x + \cos x, \quad 0 < x < 2\pi$.
24. $f(x) = x + \cos 2x, \quad 0 < x < \pi$.
25. $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x, \quad 0 < x < \pi$.
26. $f(x) = \sin^2 x, \quad 0 < x < 2\pi$.
27. $f(x) = \sin x \cos x - 3\sin x + 2x, \quad 0 < x < 2\pi$.
28. $f(x) = 2\sin^3 x - 3\sin x, \quad 0 < x < \pi$.

FIGURA 12. ESERCIZIO 2 (di approfondimento): Determinare massimi, minimi, flessi e intervalli di concavità e convessità delle seguenti funzioni.

7. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}, \quad x \in \left[\frac{1}{10}, 2\right].$

8. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}, \quad x[1, \sqrt{2}].$

9. $f(x) = (x-1)(x-2), \quad x \in [0, 2].$

10. $f(x) = (x-1)^2(x-2)^2, \quad x \in [0, 4].$

11. $f(x) = \dfrac{x}{4+x^2}, \quad x \in [-3, 1].$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in [-1, 2].$

13. $f(x) = (x - \sqrt{x})^2.$

14. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}.$

15. $f(x) = x\sqrt{3-x}.$

16. $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

17. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x-1}.$

18. $f(x) = (4x-1)^{1/3}(2x-1)^{2/3}.$

19. $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{3}\cos x, \quad 0 \le x \le \pi.$

20. $\cancel{f(x) = \cot x + x, \quad 0 \le x \le \frac{2}{3}\pi.}$

21. $f(x) = 2\cos^3 x + 3\cos x, \quad 0 \le x \le \pi.$

22. $f(x) = \sin 2x - x, \quad 0 \le x \le \pi.$

23. $f(x) = \tan x - x, \quad -\frac{1}{3}\pi \le x \le \frac{1}{2}\pi.$

24. $f(x) = \sin^4 x - \sin^2 x, \quad 0 \le x \le \frac{2}{3}\pi.$

25. $f(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \le x < 1 \\ x-3, & 1 \le x \le 4 \\ 5-x, & 4 < x \le 7. \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} x+9, & -8 \le x < -3 \\ x^2+x, & -3 \le x \le 2 \\ 5x-4, & 2 < x < 5. \end{cases}$

27. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & -2 \le x < -1 \\ 5+2x-x^2, & -1 \le x \le 3 \\ x-1, & 3 < x < 6. \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 2-2x-x^2, & -2 \le x \le 0 \\ |x-2|, & 0 < x < 3 \\ \frac{1}{3}(x-2)^3, & 3 \le x \le 4. \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & -3 \le x < 0 \\ x^2-4x+2, & 0 \le x < 3 \\ 2x-7, & 3 \le x < 4. \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & 0 \le x < 1 \\ -2x, & 1 < x < 2 \\ -\frac{1}{2}x^2, & 2 \le x \le 3. \end{cases}$

FIGURA 13. ESERCIZIO 3 (di approfondimento): Determinare massimi, minimi, flessi e intervalli di concavità e convessità delle seguenti funzioni.