Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

11 - Integrali

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Pecorella, D. Provenzano e A. Consiglio

1. Introduzione

Prima di introdurre il concetto di integrale, definiamo il concetto di **antiderivata** o **primitiva** di una funzione.

Definizione Sia f una funzione continua sull'intervallo chiuso $[a, b]$. Una funzione F continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b) si dice **antiderivata** o **primitiva** di f se:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

In altri termini, data una funzione $f(x)$, l'antiderivata di $f(x)$ è una qualsiasi funzione $F(x)$ la cui derivata è proprio $f(x)$.

Esempio 1.1
Determinare un'antiderivata di $f(x) = x^2$.
Per la definizione ora vista, stiamo cercando una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = x^2$. Se $F(x)$ fosse uguale a x^3 si avrebbe che:

$$F'(x) = 3\,x^2,$$

che non è esattamente quello che stiamo cercando, ma ci si avvicina parecchio. In particolare, moltiplicando x^3 per un'opportuna costante, $\frac{1}{3}$, otteniamo una nuova funzione, $F(x) = \frac{x^3}{3}$ tale che:

$$F'(x) = \frac{1}{3}\,3\,x^2 = x^2 = f(x).$$

In generale l'antiderivata di $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ è data da

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Esempio 1.2
Determinare un'antiderivata di $f(x) = \sin(x)$. Si ricorda che

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin x.$$

Quindi, se ponessimo $F(x) = \cos(x)$ allora avremmo $F'(x) = -\sin(x)$, che è quanto vorremmo ottenere tranne che per il segno "−". A questo è possibile ovviare facilmente ponendo $F(x) = -\cos(x)$ la cui derivata è $F'(x) = \sin(x) = f(x)$. In maniera analoga si ottiene che l'antiderivata di $f(x) = \cos(x)$ è $F(x) = \sin(x)$, in quanto $F'(x) = \cos(x) = f(x)$.

Esempio 1.3
Determinare l'antiderivata di $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Si osservi che, come

abbiamo visto, per potenze razionali $\frac{d}{dx}x^q = q\, x^{q-1}$. Nel nostro caso, vogliamo che $q-1$ sia uguale a $\frac{1}{2}$, da cui $q=\frac{3}{2}$. Infatti:

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Questo risultato, a meno della costante $\frac{3}{2}$ è il risultato che vorremmo ottenere. Per ovviare a questo problema sarà dunque sufficiente porre:

$$F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

La funzione $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ è dunque l'antiderivata di $f(x) = \sqrt{x}$.

In generale $\forall r \in \mathbb{Q}$, $r \neq -1$ si ha che l'antiderivata di $f(x) = x^r$ è uguale a $F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$. Il caso $r=-1$, corrispondente a $f(x)=\frac{1}{x}$ è particolare, poiché $\frac{1}{x}$ NON è derivata di alcuna potenza. Invece, come è noto, $f(x) = \frac{1}{x}$ è la derivata della funzione logaritmo:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}.$$

Dunque l'antiderivata di $f(x) = \frac{1}{x}$ è proprio $F(x) = \ln(x)$.

Al contrario delle derivate di funzioni elementari, determinare l'antiderivata di una funzione non è sempre banale e, a volte, data una $f(x)$, non è possibile trovare una funzione elementare $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$. Per esempio le funzioni $f(x) = e^{-x^2}$ e $g(x) = \sqrt{x}\sin(x)$ non ammettono alcuna funzione elementare come antiderivata.

Infine, l'antiderivata della funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è la funzione stessa, $F(x) = e^x$. Infatti: $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = e^x = f(x)$.

Un'interessante proprietà dell'antiderivata è riassunta nel seguente teorema:

Teorema 1.1. *Sia $F(x)$ un'antiderivata della funzione $f(x)$ su (a,b). Allora la funzione $G(x) = F(x)+c$ è pure un'antiderivata di $f(x)$ su (a,b) $\forall c \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione.Poiché la funzione $F(x)$ è derivabile su (a,b) anche la funzione $G(x) = F(x)+c$ è derivabile su (a,b) in quanto somma di funzioni derivabili (la funzione costante, c, è derivabile ovunque). Per ipotesi $F'(x) = f(x)$. Quindi:

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}c = f(x) + 0 = f(x).$$

□

Quindi se una funzione $f(x)$ ammette antiderivata $F(x)$, esiste un'intera classe di funzioni antiderivate del tipo $G(x) = F(x)+c$ con $c \in \mathbb{R}$. In figura 1 è illustrata la tesi del precedente teorema: le rette tangenti in punti aventi la stessa ascissa nelle due funzioni hanno la stessa pendenza, ovvero le tangenti sono parallele. La separazione tra le due curve è costante e le curve si dicono parallele.

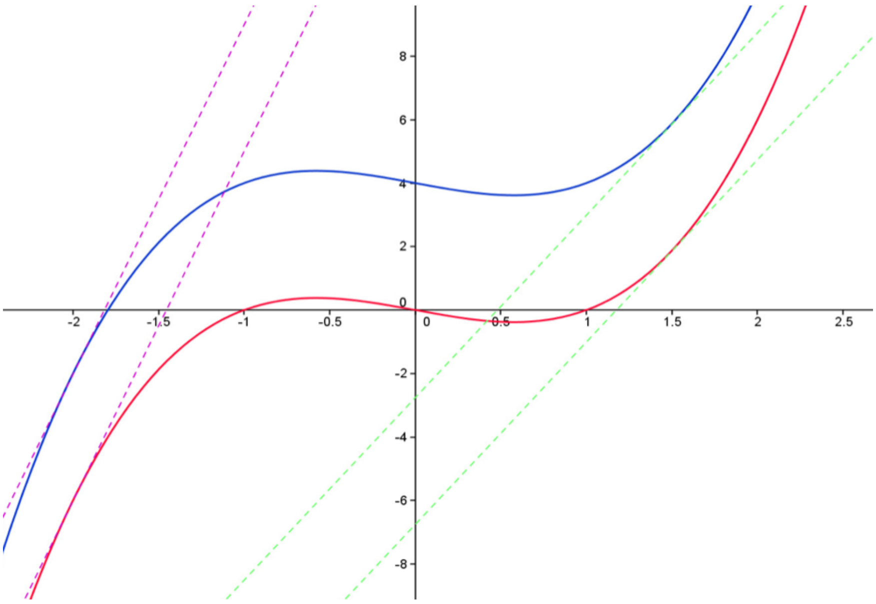

FIGURA 1. Esempio di due funzioni antiderivate della stessa funzione.

2. Integrale Definito: approccio di Darboux

Per integrale definito di una funzione[1] si intende il calcolo dell'area di una figura che ha come bordi un intervallo sull'asse delle ascisse, chiuso e limitato, $[a, b]$, detto **intervallo di integrazione** o dominio di integrazione e il grafico della funzione assegnata.
Un approccio per il calcolo del calore di tale area consiste nel suddividere la figura in rettangoli sempre più piccoli e sommare le aree corrispondenti.

Definizione Sia $a < b$. Una **partizione** dell'intervallo $[a, b]$ è un qualunque insieme finito e ordinato di punti distinti di $[a, b]$ di cui il primo è a e l'ultimo è b. Indicheremo una partizione con il simbolo

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\},$$

dove $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Gli $n+1$ punti della partizione precedente inducono n sub-intervalli dell'intervallo $[a, b]$. L'ampiezza dell'i-esimo sub-intervallo è denotato da

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

[1]Strettamente parlando, in questa descrizione qualitativa, si dovrebbe parlare di funzione a valori non negativi

e si avrà per costruzione:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) =$$
$$= x_n - x_0 = b - a.$$

Sia $f(x)$ una funzione, detta **funzione integranda** *continua* su $[a, b]$. Allora, per il teorema di Weierstrass, su ogni sub-intervallo Δx_i la $f(x)$ ammetterà un massimo, M_i, e un minimo, m_i:

$$m_i \leq f(x) \leq M_i \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Definizione Si definisce **somma integrale inferiore** della funzione f su $[a, b]$ **relativa alla partizione** P il numero reale:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i;$$

si chiama **somma integrale superiore** di f **relativa alla partizione** P di $[a, b]$ il numero reale

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i.$$

Si osservi che ogni addendo di $s(f, P)$ è l'area del rettangolo **interno** alla curva $f(x)$, mentre gli addendi di $S(f, P)$ rappresentano l'area dei rettangoli **esterni** alla curva f(x). Nei due pannelli di Fig.2 sono

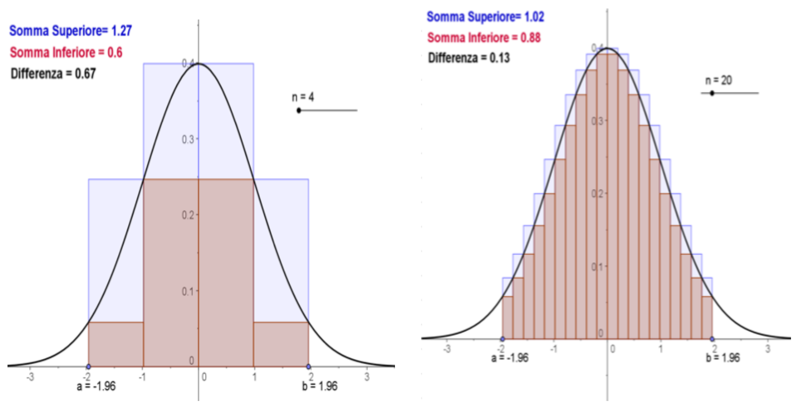

FIGURA 2. Somma integrale inferiore e somma integrale superiore di una funzione f relative a due diverse partizioni dell'intervallo $[a, b] = [-2, 2]$.

rappresentati i rettangoli che costituiscono la somma inferiore (rosa) e la somma superiore (celeste) relative a due diverse partizioni di $[a, b] = [-2, 2]$. Nella figura di sinistra, la partizione ha n=4 sub-rettangoli, in quella di destra $n = 20$ rettangoli. Si osservi che, all'aumentare di n l'area coperta dai rettangoli approssima meglio l'area sottesa alla curva. Inoltre, la somma superiore e quella inferiore covergono verso un unico numero (la loro differenza infatti diminuisce all'aumentare di n).

Affinché una funzione sia integrabile è sufficiente (non necessario) che sia continua. La condizione di continuità non è necessaria in quanto esistono funzioni non continue ma integrabili (vedremo alcuni esempi quando parleremo di **integrali impropri**). Ometteremo questa dimostrazione ed introdurremo questo risultato tramite una definizione.

Definizione di integrale definito di funzioni continue. Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ L'unico numero I che soddisfa la disuguaglianza:

$$s(f, P) \leq I \leq S(f, P), \quad \forall P \text{ di } [a, b]$$

è chiamato **integrale definito di f su** $[a, b]$ ed è denotato da

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Nell'espressione che denota l'integrale, la variabile x, detta **variabile di integrazione** è una variabile "muta", nel senso che non ha significato specifico e può essere sostituita con qualsiasi simbolo. In molti casi, per evitare confusione con l'estremo di integrazione (poiché a e b possono essere variabili), l'integrale può essere espresso come

$$\int_a^b f(u)du, \text{ oppure } \int_a^b f(t)dt.$$

Il simbolo dx (oppure du o dt) è detto **differenziale** della variabile di integrazione.

Come per i limiti, la definizione di integrale può essere utilizzata per calcolarne il valore. Tuttavia, questo è possibile (o conveniente) solo in alcuni casi specifici.

Esempio 2.1
Verificare che, se k è una costante reale allora:

$$\int_a^b k\,dx = k\,(b-a).$$

Essendo $f(x) = k$ allora, in ogni sub-intervallo sarà $m_i = k = M_i$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} s(f, P) = S(f, P) &= k\,\Delta x_1 + k\,\Delta x_2 + ... + k\,\Delta x_n = \\ &= k\,(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n) = k \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \\ &= k\,(b-a). \end{aligned}$$

Esempio 2.2
Verificare che
$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2).$$
In Fig. 3 è rappresentato il caso in cui l'integrale deve essere calcolato su $[1,5]$. Si nota facilmente che $m_i = x_{i-1}$ e $M_i = x_i$. Per esempio nel sub-intervallo $[1.5,2]$, $m_2 = 1.5$ e $M_2 = 2$. Pertanto possiamo scrivere $s(f,P)$ e $S(f,P)$ nel modo seguente:
$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\Delta x_i;$$
$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} x_i\Delta x_i.$$
Si osservi che, $\forall P$, risulta:
$$x_{i-1} \le \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) \le x_i.$$
Moltiplicando ogni membro di questa disequazione per la quantità positiva Δx_i otteniamo:
$$\Delta x_i\, x_{i-1} \le \frac{1}{2}\Delta x_i\,(x_{i-1} + x_i) \le x_i\,\Delta x_i.$$
Quindi, sommando su i risulta:
$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\, x_{i-1} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\Delta x_i\,(x_{i-1}+x_i) \le \sum_{i=1}^{n} x_i\,\Delta x_i = S(f,P).$$
Poiché, per definizione, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ allora $\Delta x_i\,(x_{i-1} + x_i) = (x_i - x_{i-1})\,(x_{i-1}+x_i) = x_i^2 - x_{i-1}^2$. Inoltre, calcolando la sommatoria, abbiamo:
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}\,(x_1^2 - x_0^2 + x_2^2 - x_1^2 + ... + x_n^2 - x_{n-1}^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2).$$
Quindi, includendo questo risultato nelle ultime diseguaglianze, risulta:
$$s(f,P) \le \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2) \le S(f,P),$$
Quindi $I = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2)$.

3. Integrale definito: approccio di Riemann

Come visto, le somme inferiori e superiori di Darboux si ottengono considerando, rispettivamente il minimo e il massimo di $f(x)$ su ciascun

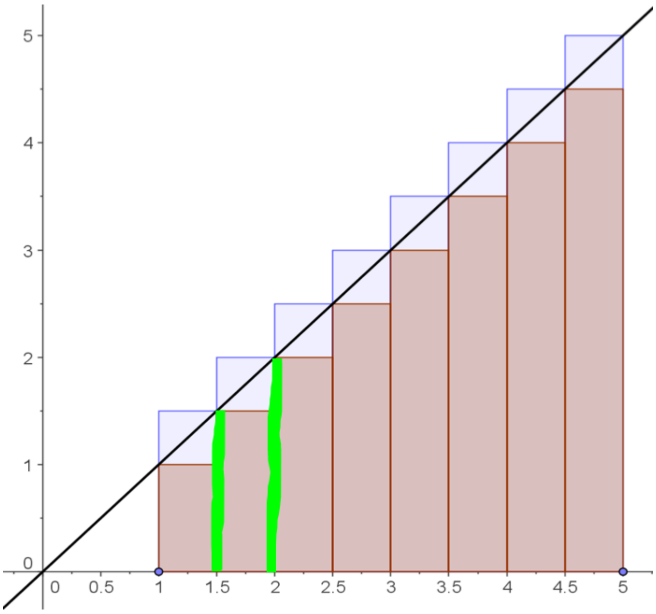

FIGURA 3. Somme superiori e inferiori per il calcolo dell'integrale di $f(x) = x$ nell'intervallo $[a, b] = [1, 5]$.

sub-intervallo Δx_i. Un approccio alternativo è quello proposto da Riemann. Sia $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partizione dell'intervallo $[a, b]$. La partizione P suddivide l'intervallo $[a, b]$ in n sub-intervalli di ampiezza $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Per ogni sub-intervallo si scelga $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ e si formi il prodotto $f(x_i^*)\Delta x_i$. Questo prodotto equivale all'area del rettangolo avente come base Δx_i e altezza $f(x_i^*)$. La somma di questi prodotti (aree) per $i = 1, 2, ..., n$ è detta **somma di Riemann**:

$$G(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

E' importante notare che, nel caso di funzioni continue, cui si può applicare il metodo di Darboux in forza del teorema di Weierstrass risulterà $\forall P$ e $\forall i = 1, ..., n$ $m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i$, da cui:

$$s(f, P) \leq G(f, P) \leq S(f, P), \quad \forall P.$$

Nei due pannelli di figura 4 sono riportati i rettangoli ottenuti scegliendo come x_i^* un arbitrario punto in ogni sub-intervallo $[x_{i-1}, x_i]$.

Per ogni partizione P di $[a, b]$ si definisce con $||P||$ la norma di P come:

$$||P|| = \max_{i=1,...,n} \Delta x_i.$$

L'integrale definito secondo Riemann di una funzione f sull'intervallo $[a,b]$ è definito come il limite per $||P|| \to 0$ di $G(f,P)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P||\to 0} G(f,P) = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

In altre parole, si definisce integrale secondo Riemann di f su $[a,b]$ la quantità reale

$$\int_a^b f(x)dx$$

tale che $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\forall P$: $||P|| < \delta$ allora:

$$\left| G(f,P) - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon.$$

Si noti che, mentre per funzioni continue la definizione di Darboux e quella di Riemann sono equivalenti, la formulazione di Riemann è più generale, poiché consente di definire l'integrale anche di funzione non continue su tutto l'intervallo $[a,b]$[2].

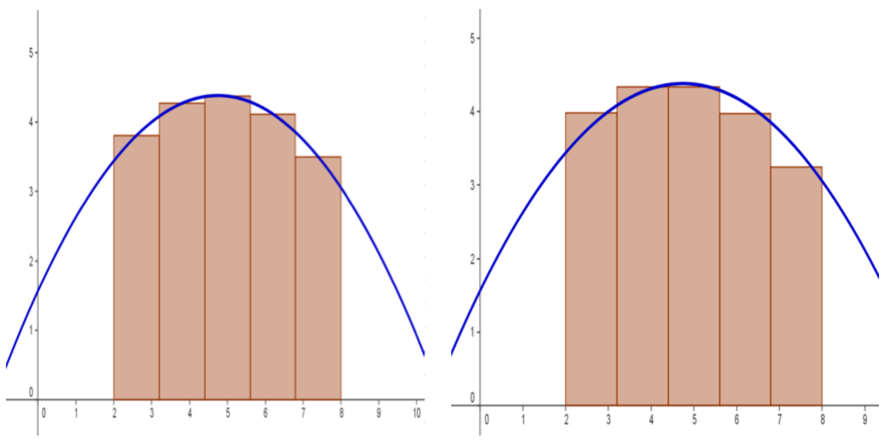

Figura 4. Rettangoli ottenuti scegliendo punti arbitrari x_i^* nei sub-intervalli $[x_{i-1}, x_i]$

Vediamo ora alcune proprietà degli integrali.

3.1. Linerità dell'integrale. Siano f e g due funzioni continue su $[a,b]$ e siano α e β due numeri reali. Allora:

$$\int_a^b [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

[2] Questo argomento è abbastanza delicato e non lo approfondiremo ulteriormente, finché non parleremo di integrali impropri.

3.2. Additività rispetto all'intervallo di integrazione. Sia f una funzione continua su $[a,b]$ e sia $c \in [a,b]$. Risulta:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3.3. Monotonia. Siano f e g due funzioni continue su $[a,b]$ tali che $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Come per il calcolo dei limiti, utilizzare la definizione (secondo Darboux o secondo Riemann) di integrale per il calcolo dell'integrale di una funzione generica può risultare molto complicato. Vedremo ora alcuni teoremi propedeutici alla dimostrazione di alcuni risultati fondamentali del calcolo integrale, i quali, a loro volta, ci mostreranno vie molto più agevoli, rispetto all'utilizzo della definizione, per calcolare l'integrale di una generica funzione.

Teorema 3.1 (della media integrale). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$. Allora $\exists c \in [a,b]$ tale che:*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dimostrazione.Essendo la funzione f continua su $[a,b]$ allora, per il teorema di Weierstrass, essa ammette massimo M e minimo m su $[a,b]$. Pertanto

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a,b].$$

Per la proprietà di monotonia dell'integrale (vista sopra) avremo:

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx,$$

che, tenuto conto della proprietà di linearità dell'integrale (quindi del fatto che $\int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx = m\,(b-a)$), possiamo riscrivere come:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a),$$

da cui:

$$m \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Poiché f è (per ipotesi) continua su $[a,b]$ vale il teorema dei valori intermedi (TVI, teorema 1.2 degli appunti sulla continuità) quindi, preso comunque un k in $[m,M]$ allora esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = k$.

Nel nostro caso, per la disuguaglianza precedente, possiamo scegliere il valore di k pari a $\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\, dx$ per ottenere la tesi:

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\, dx.$$

□

Tra breve definiremo il concetto di funzione integrale. Cerchiamo prima di introdurre questo concetto attraverso un esempio. Si consideri l'integrale

$$\int_a^b t\, dt.$$

Come abbiamo visto, tale integrale risulta pari a $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. Se facciamo variare l'estremo superiore dell'integrale, b, avremo che il valore dell'integrale sarà una funzione del valore di tale estremo:

$$\int_a^x t\, dt = \frac{1}{2}(x^2 - a^2) = F(x).$$

Si osservi che la variabile di integrazione, t, ha un simbolo diverso dalla variabile x, estremo mobile dell'intervallo di integrazione.

Definizione di funzione integrale Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, b]$. Si definisce **funzione integrale** la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

TEOREMA 3.2 (**Teorema fondamentale del calcolo integrale**). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$. Allora la funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) e si ha che:

$$F'(x) = f(x).$$

DIMOSTRAZIONE.Dimostriamo la derivabilità di F su (a, b). Consideriamo il rapporto incrementale di F in un punto x di (a, b):

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(t)\, dt \; - \; \int_a^x f(t)\, dt}{h} = \\
&= \text{(per l'additività rispetto all'intervallo di integrazione)} = \\
&= \frac{\int_a^x f(t)\, dt \; + \int_x^{x+h} f(t)\, dt \; - \; \int_a^x f(t)\, dt}{h} = \\
&= \frac{\int_x^{x+h} f(t)\, dt}{h}.
\end{aligned}$$

Per il teorema della media integrale (visto sopra) $\exists c \in [x, x+h]$ tale che:

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(c) \quad \Rightarrow \quad \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c).$$

Inoltre, dato che $x \leq c \leq x+h$, se $h \to 0$, allora $c \to x$. Inoltre, per la continuità di $f(x)$, avremo che $\lim_{c\to x} f(c) = f(x)$ e quindi:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{c\to x} f(c) = f(x).$$

$\square$

Questo teorema è molto importante in quanto stabilisce una connessione fra l'integrale e la derivata di una funzione. In particolare, la funzione integrale, $F(x)$, è una anti-derivata della funzione integranda, $f(x)$. Infatti, il teorema precedente dimostra proprio che $F'(x)$ (la derivata della funzione integrale) è uguale a $f(x)$ (la funzione integranda). Ma questa è la definizione di anti-derivata, ossia $F(x)$ è un'anti-derivata di $f(x)$: $F'(x) = f(x)$.

Il risultato di questo teorema fornisce uno strumento alternativo per il calcolo dell'integrale di una funzione continua, alternativo ai metodi di Darboux e Riemann.

Teorema 3.3 (**Formula fondamentale del calcolo integrale**). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e sia, inoltre, $F(x)$ un'anti-derivata di $f(x)$, ossia tale che $F'(x) = f(x)$. Allora:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Dimostrazione.Si consideri una partizione $P = \{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\}$ di $[a,b]$. Possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) = \\ &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + ... + F(x_n) - F(x_{n-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right]. \end{aligned}$$

Essendo $F(x)$ derivabile (per definizione di anti-derivata) allora possiamo applicare il teorema del valore medio ad $F(x)$ in ogni intervallino $[x_{i-1}, x_i]$. Quindi $\forall i = 1, ..., n$ $\exists c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tale che

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i},$$

da cui, ricordando che per ipotesi $F'(c_i) = f(c_i)$ e sostituendo nella sommatoria ottenuta sopra per esprimere $F(b) - F(a)$, si ottiene:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Si osservi che l'ultima sommatoria è una sommatoria di Riemann (i punti c_i sono gli x_i^* della definizione). Quindi per $||P|| \to 0$ otteniamo:

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$$

da cui segue la tesi:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

La formula fondamentale del calcolo integrale permette di calcolare l'integrale "semplicemente" cercando l'anti-derivata (o primitiva) della funzione integranda. Questa ricerca tuttavia, non è sempre semplice; inoltre, per alcune funzioni non è possibile esprimere un'anti-derivata tramite una combinazione (finita) di funzioni elementari.

Definizione di integrale indefinito. Si definisce **integrale indefinito** di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ l'insieme di tutte le anti-derivate (o primitive) di $f(x)$. Indicheremo l'integrale indefinito di f(x) col simbolo

$$\int f(x)\, dx.$$

Si osserva che due anti-derivate differiscono per una costante additiva. Per questo motivo, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ si scrive che:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c,$$

dove c è una costante arbitraria, che prende il nome di **costante di integrazione**.

Possiamo riassumere nei seguenti punti i passi necessari per il calcolo dell'integrale definito di una funzione $f(x)$ su un intervallo $[a, b]$:

(1) Trovare un'anti-derivata, $F(x)$, di f(x).
(2) Determinare il valore di $F(x)$ negli estremi di integrazione: $F(a)$ e $F(b)$.
(3) L'integrale definito di $f(x)$ su $[a, b]$ sarà data dalla differenza $F(b) - F(a)$.

IMPORTANTE: un aspetto che finora non abbiamo sottolineato è che l'integrale di una funzione su un certo intervallo può essere negativo. Questo accade quando la funzione integranda $f(x)$ determina un'area al di sotto dell'asse delle ascisse maggiore di quella che determina al di sopra dell'asse.