Università degli Studi di Palermo

Facoltà di Economia

Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

12 - Tecniche di integrazione

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Pecorella, D. Provenzano e A. Consiglio

1. Introduzione

Le *tecniche di integrazione*, ossia le strategie per la determinazione dell'antiderivata, che analizzeremo sono:

(1) *integrazione diretta;*
(2) *integrazione per sostituzione;*
(3) *integrazione per parti.*

La lista non è esaustiva e, chiaramente, per alcune tipologie di funzioni è necessario ricorrere ad altre tecniche.

2. Integrazione diretta

Questo metodo di integrazione è il più semplice, in quanto consiste, quando possibile, nel riconoscere nella funzione integranda una derivata di una funzione nota $F(x)$.

Esempio 2.1
Determinare

$$\int_2^3 x dx$$

Come visto, il primo passo consiste nel determinare l'antiderivata dell'integrale indefinito $\int x dx$. È noto che se $F(x) = x^2$, allora $F'(x) = 2x$, pertanto, affinchè $F'(x) = f(x) = x$ (vedi teorema di Torricelli-Barrow) deve essere che

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

dato che

$$F'(x) = \cancel{2}\frac{x}{\cancel{2}} = x$$

Ottenuta l'antiderivata, il valore dell'integrale è dato da (cedi Formula Fondamentale del Calcolo Integrale)

$$\int_2^3 x dx = F(3) - F(2) = \frac{1}{2}(3^2 - 2^2) = \frac{5}{2}$$

In generale, come abbiamo visto,

$$\int x^r dx$$

con $r \in \mathbb{Q}$ ed $r \neq -1$ ha come antiderivata

$$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$$

quindi scriveremo che

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$$

Esempio 2.2
Determinare

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + x^2 + 4x^{\frac{2}{3}}\right) dx$$

In questo caso non è possibile riconoscere una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = \frac{1}{x^3} + x^2 + 4x^{\frac{2}{3}}$. Si ricordi, però, che per il teorema di linearità dell'integrale, l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali, pertanto,

$$\int \left(\frac{1}{x^3} + x^2 + 4x^{\frac{2}{3}}\right) dx = \int x^{-3} dx + \int x^2 dx + 4 \int x^{\frac{2}{3}} dx$$

I singoli integrali sono riconducibili all'antiderivata di potenze con esponente razionale. In particolare,

$$\begin{aligned}
\int x^{-3} dx &= \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c_1 = -\frac{x^{-2}}{2} + c_1 \\
\int x^2 dx &= \frac{x^3}{3} + c_2 \\
\int x^{\frac{2}{3}} dx &= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c_2 = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_3
\end{aligned}$$

(Lo studente derivi le tre antiderivate e verifichi che $F'(x) = f(x)$ in ciascuno dei tre casi). Ricomponendo l'integrale si ha che

$$\int \left(\frac{1}{x^3} + x^2 + 4x^{\frac{2}{3}}\right) dx = -\frac{x^{-2}}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{12}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$$

e quindi

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + x^2 + 4x^{\frac{2}{3}}\right) dx = \left(-\frac{2^{-2}}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{12}{5} 2^{\frac{5}{3}}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{12}{5}\right)$$

da cui

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{x^3} + x^2 + 4x^{\frac{2}{3}}\right) dx = 7.93$$

In generale, per l'integrazione diretta si suggerisce di fare riferimento ad una tabella di integrali (si veda la tabella di derivate e antiderivate alla fine del capitolo), e attraverso manipolazioni algebriche trasformare, se possibile, la funzione integranda in una delle forme elencate nella tabella.
Come vedremo, la determinazione di una antiderivata non segue regole ben precise come la derivazione. In molti casi è necessario combinare diverse tecniche per ottenere funzioni integrande che possano essere integrate direttamente (il tutto deve essere condito da una buona dose di intuito e molto esercizio).

3. Integrazione per sostituzione

L'integrazione per sostituzione è equivalente a determinare l'antiderivata di una funzione composta.
Si ricorda che se $F(x) = f[g(x)]$ allora

$$F'(x) = f'[g(x)]g'(x)$$

Lo stesso risultato si ottiene ponendo $u = g(x)$, da cui,

$$F'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)g'(x) = f'[g(x)]g'(x)$$

In generale, se si nota che un integrale può essere scritto nella seguente forma:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx,$$

per una qualche funzione f e una qualche funzione g, allora è conveniente applicare il seguente metodo. Si osservi che ponendo $u = g(x)$ la derivata prima di u rispetto a x è

$$\frac{du}{dx} = g'(x)$$

da cui si ricava

$$du = g'(x)dx$$

sostituendo nell'integrale si ottiene

$$\int f(u)du = F(u) + c$$

dove $F(u)$ è una primitiva di $f(u)$: $F'(u) = f(u)$. Infatti

$$\frac{d}{dx}F(u) = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(u)g'(x) = f[g(x)]g'(x).$$

Esempio 3.1
Determinare

$$\int \tan(x)dx.$$

.
Possiamo riscrivere l'integrale come

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

Notando che il termine a numeratore $(\sin x)$ è uguale, a meno di un segno, alla derivata di $\cos(x)$, appare una buona scelta porre $u = \cos x$, da cui:

$$du = -\sin x dx \quad \text{e} \quad dx = -\frac{du}{\sin x}.$$

Sostituendo nell'integrale iniziale si ha che:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c$$

Si osservi che ponendo $u = \sin x$ la soluzione dell'integrale non è altrettanto agevole.

Esempio 3.2
Determinare $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} dx$. Questo integrale può essere riscritto come:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx.$$

Notando che il numeratore non è altro che la derivata del denominatore, ci troviamo di fronte ad un integrale del tipo:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx,$$

dove, nel nostro caso, $f(x) = \ln(x)$. In casi come questo, è sempre conveniente procedere per sostituzione, ponendo $u = f(x) = \ln x$, da cui $du = f'(x)dx = \dfrac{1}{x}dx$, da cui $dx = xdu$. Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{u} \cdot du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$$

Esempio 3.3
Determinare $\displaystyle\int x^2 \sqrt{4 + x^3} dx$.
In questo caso, il termine che complica l'integrale è la radice del polinomio $4 + x^3$. Tuttavia, notando che la derivata dell'argomento della radice, ovvero del polinomio $4 + x^3$, è $3\,x^2$, proporzionale al termine a prodotto della radice, risulta conveniente porre $u = 4 + x^3$, da cui $du = 3x^2 dx$. Si osservi che $x^2 dx = \dfrac{1}{3} du$ e sostituendo si ottiene,

$$\int \sqrt{4 + x^3}\, x^2 dx = \int \sqrt{u}\, \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9} (4 + x^3)^{\frac{3}{2}} + c$$

Esempio 3.4
Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{-a}^{0} y^2 \left(1 - \frac{y^3}{a^2}\right)^{-2} dy$$

Anche in questo caso, poiché la derivata del termine in parentesi tonda coincide con il termine fuori parentesi, conviene porre u

uguale al termine in parentesi, ossia $u = 1 - \frac{y^3}{a^2}$, da cui $du = -3\frac{y^2}{a^2}dy$ e, quindi, $y^2 dy = -\frac{a^2}{3}du$. **Nel caso di integrali definiti è conveniente effettuare anche la trasformazione dell'intervallo d'integrazione**. Un approccio altrettanto valido è, comunque, quello di determinare l'integrale indefinito e sostituire all'indietro fino ad ottenere una primitiva in termini della variabile di partenza (y in questo caso) e calcolare il valore di questa antiderivata agli estremi dell'intervallo originario. Se optiamo per il primo approccio, si ha che per $y = 0 \Rightarrow u = 1 - \frac{0^3}{a^2} = 1$, mentre per $y = -a \Rightarrow u = 1 - \frac{(-a)^3}{a^2} = 1 + a$. Pertanto,

$$\int_{-a}^{0} y^2 \left(1 - \frac{y^3}{a^2}\right)^{-2} dy = -\frac{a^2}{3}\int_{1+a}^{1} u^{-2} du = \frac{a^2}{3}u^{-1}\Big|_{1+a}^{1} =$$
$$= \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{3}(1+a)^{-1}$$

Esempio 3.5
Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos^3(\pi x)\sin(\pi x)dx$$

Si ponga $u = \cos^3(\pi x)$, da cui $du = -3\pi\cos^2(\pi x)\sin(\pi x)dx$. Inoltre, per $x = 0 \Rightarrow u = 1$ e per $x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 0$. Sostituendo si ottiene

$$\int_1^0 \frac{udu}{-3\pi\cos^2\pi x}$$

Come si può notare, nell'integrale compare ancora la variabile x. In questi casi si potrebbe determinare x in funzione di u e sostituire nell'integrale, quindi $u = \cos^3(\pi x) \Rightarrow x = \frac{1}{\pi}\arccos(u^{\frac{1}{3}})$. Come è evidente, una tale soluzione complica ulteriormente l'integrale. Un'alternativa possibile consiste nel porre $u = \cos(\pi x)$. In tal caso si ha che $du = -\pi\sin(\pi x)dx$, da cui $-\frac{du}{\pi} = \sin(\pi x)dx$. Sostituendo in maniera opportuna ed osservando che l'intervallo di integrazione è identico a quello suvvisto, si ha che

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos^3(\pi x)\sin(\pi x)dx = -\frac{1}{\pi}\int_1^0 u^3 du = \left(-\frac{1}{\pi}\frac{u^4}{4}\right)_1^0 = 0 + \frac{1}{4\pi}$$

In alcuni casi, comunque, sostituire il valore di x in funzione di u può semplificare l'integrale.

Esempio 3.6
Determinare il seguente integrale indefinito $\int x(x-3)^5 dx$.
Si ponga $u = x-3$, da cui $du = dx$. Al fine di eliminare la variabile x dall'integrale, si sostituisca a x l'espressione $u+3$ ottenuta dalla posizione fatta prima, si ha così:

$$\int (u+3)u^5 du = \int (u^6 + 3u^5) du = \frac{u^7}{7} + \frac{1}{2}u^6 + c =$$
$$= \frac{(x-3)^7}{7} + \frac{1}{2}(x-3)^6 + c$$

Esempio 3.7
Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{x^2+1} dx$$

Ponendo $u = x^2 + 1$ si ha che $du = 2xdx$. Inoltre, $x^2 = u - 1$ e $x^4 = (u-1)^2$. Possiamo scrivere l'integrale come

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int_1^4 (u-1)^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{2}\int_1^4 (u^2 - 2u + 1)\sqrt{u} du =$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^4 \left(u^2 u^{\frac{1}{2}} - 2uu^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

Si lascia allo studente di completare la soluzione trovando il valore dell'integrale.

Esempio 3.8
Determinare i seguenti integrali indefiniti:

$$(i) \quad \int \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2} dx; \qquad (ii) \quad \int \frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{1+g^2(x)}} dx$$

(i) In questo caso si ponga $u = \dfrac{1}{x}$, da cui $du = -\dfrac{1}{x^2}dx$. Pertanto,

$$\int \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2} dx = -\int \sin(u) du = \cos(u) + c = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + c.$$

(ii) In questo secondo caso, si ponga $u = 1 + g^2(x)$, da cui $du = 2g(x)g'(x)dx$. Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{1+g^2(x)}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} du =$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1 + g^2(x)} + c$$

4. Integrazione per parti

L'integrazione per parti è equivalente a determinare l'antiderivata di un prodotto di funzioni. Si ricorda che se

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

allora

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Integrando ambo i membri si ottiene:

$$\int (f \cdot g)'(x)dx = \int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx.$$

Giacché, per definizione di derivata,

$$\int (f \cdot g)'(x)dx = (f \cdot g)(x) + c = f(x)g(x) + c,$$

possiamo riscrivere l'uguaglianza ottenuta sopra come segue:

$$f(x)g(x) + c = \int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx,$$

da cui

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + c.$$

Il processo per cui l'integrale di un prodotto di funzioni è ottenuto calcolando l'integrale $\int f'(x)g(x)dx$ è detto *integrazione per parti*. Si osservi che tale tecnica è conveniente se effettivamente il calcolo di $\int f'(x)g(x)dx$ è più semplice di $\int f(x)g'(x)dx$.
Come si procede nell'integrazione per parti?
Si osservi che un termine del secondo membro è $f(x)g(x)$. Pertanto, è necessario che una delle funzioni che formano il prodotto sia abbastanza semplice da poterne determinare l'antiderivata $g(x)$. Tale scelta deve comunque essere guidata dalla effettiva semplificazione del secondo integrale.

Esempio 4.1
Determinare l'antiderivata di $\int \ln(x)dx$.
La funzione integranda può essere vista come il prodotto di $g'(x) = 1$ e $f(x) = \ln x$. L'antiderivata di $g'(x)$ è $g(x) = x$. Quindi, integrando per parti, otteniamo:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}dx = x\ln(x) - x + c.$$

Lo studente mostri che $\dfrac{d}{dx}[x\ln(x) - x] = \ln(x)$.

Esempio 4.2
Determinare l'integrale indefinito $\int x^2 \ln(x)dx$.
È importante individuare una funzione di cui è semplice determinare l'antiderivata e che non complichi oltre modo l'integrale del secondo membro.
Si provi con $g'(x) = x^2$, quindi, $g(x) = \dfrac{x^3}{3}$ e pertanto,

$$\int x^2 \ln(x)dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2 dx =$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + c.$$

Esempio 4.3
Determinare l'integrale indefinito di:

$$\int x^2 \sin(x)dx.$$

In questo caso, sia x^2 che $\sin(x)$ hanno una antiderivata di semplice forma, $\frac{x^3}{3}$ e $-\cos(x)$, rispettivamente. Se, provando ad integrare per parti, scegliessimo di porre $g'(x) = x^2$ ci ritroveremmo a dover calcolare un integrale più complicato di quello di partenza:

$$\int x^2 \sin(x)dx = \frac{x^3}{3}\sin(x) + \frac{1}{3}\int x^3 \cos(x)dx.$$

Proviamo quindi a porre $g'(x) = \sin(x)$. Integrando per parti, si ottiene:

$$\int x^2 \sin(x)dx = -x^2\cos(x) + \int 2\,x\cos(x)dx.$$

L'integrazione per parti ci ha consentito di semplificare l'integrale: la potenza di x è passata da 2 ad 1. Tuttavia, non siamo ancora in grado di scrivere la primitiva di $x\cos(x)$. Il risultato ottenuto, però, ci suggerisce di continuare ad usare il metodo di integrazione per parti, scegliendo la funzione $\cos(x)$ come $g'(x)$. In altre parole, poniamo $g'(x) = \cos(x)$ ed integriamo nuovamente per parti. Risulta:

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + c_1.$$

Inserendo questo risultato nell'equazione precedente, otteniamo (infine) che

$$\int x^2 \sin(x)dx = -x^2 \cos(x) + 2\ [x \sin(x) + \cos(x)] + c,$$

in cui la costante c_1 è stata inglobata nella costante c.

Esempio 4.4
Determinare l'integrale indefinito:

$$\int xe^x dx.$$

Sappiamo che la derivata della funzione e^x è la funzione stessa. Questo ci suggerisce che usare e^x come funzione $g'(x)$ nell'integrazione per parti sia la scelta migliore, visto che la $g(x)$ sarà sempre uguale ad e^x mentre la derivata di $f(x) = x$ è 1 e questo dovrebbe semplificarci l'integrale. Quindi:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x\,(x-1) + c.$$

Esempio 4.5
Determinare il seguente integrale indefinito:

$$\int \cos^2(x)dx.$$

Possiamo riscrivere l'integrale nella seguente forma:

$$\int \cos(x)\ \cos(x)dx.$$

In questo caso l'unica possibilità per determinare questo integrale per parti è porre $g'(x) = \cos(x) \Rightarrow g(x) = \sin(x)$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(x)dx &= \sin(x)\ \cos(x) + \int \sin(x)\ \sin(x)dx = \\
&= \sin(x)\ \cos(x) + \int \sin^2(x)dx = \\
&\text{(Ricordando che } \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)) \\
&\sin(x)\ \cos(x) + \int [1 - \cos^2(x)]dx = \\
&= \sin(x)\ \cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx.
\end{aligned}$$

Notiamo che l'integrale da cui eravamo partiti compare nell'ultima espressione ricavata. Quindi l'eguaglianza tra la prima espressione $\int \cos^2(x)dx$ e l'ultima $\sin(x)\,\cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx$ può essere letta come un'equazione in cui la variabile è l'integrale che vogliamo calcolare: $I = \int \cos^2(x)dx$. Possiamo dunque riscrivere l'equazione e ricavare I:

$$I = \sin(x)\,\cos(x) + x - I \quad \Leftrightarrow \quad 2\,I = \sin(x)\,\cos(x) + x,$$

da cui, infine, possiamo ricavare I:

$$\int \cos^2(x)dx = I = \frac{1}{2}\,[\sin(x)\,\cos(x) + x] + c.$$

Esempio 4.6
Determinare l'integrale indefinito:

$$\int 2\,x^3\,e^{x^2}dx.$$

Anche in questo caso, porre $g'(x) = x^3$ e integrare per parti, complicherebbe l'integrale, poiché avremmo:

$$\int 2\,x^3\,e^{x^2}dx = \frac{2}{4}x^4\,e^{x^2} - \int x^5\,e^{x^2}dx.$$

D'altro canto, porre $g'(x) = e^{x^2}$ sarebbe altrettanto inutile poiché la sua antiderivata non può essere scritta tramite una combinazione finita di funzioni elementari. In questo caso conviene, prima di applicare il metodo di integrazione per parti, operare una sostituzione di variabile. In particolare, se si pone $u = x^2$ allora $du = 2\,x\,dx$. Quindi:

$$\int 2\,x^3\,e^{x^2}dx = \int x^2\,e^{x^2}2\,x\,dx = \int u\,e^u du.$$

L'integrale ottenuto può essere facilmente calcolato integrando per parti (come abbiamo già visto). Poniamo, $g'(u) = e^u \Rightarrow g(u) = e^u$. Quindi:

$$\int u\,e^u du = u\,e^u - \int e^u du = u\,e^u - e^u + c,$$

da cui, ricordando che $u = x^2$, otteniamo:

$$\int 2\,x^3\,e^{x^2}dx = e^u\,(u-1) + c = e^{x^2}\,(x^2-1) + c.$$

Esempio 4.7
Questo integrale è da considerarsi a livello di approfondimento ed è facoltativo: Determinare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\, e^x\, dx.$$

Dalle formule di duplicazione

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2\,\sin(x)\cos(x)\\ \cos(2x) &= \cos^2(x)-\sin^2(x) \quad = 2\,\cos^2(x)-1,\end{aligned}$$

posto $x \to x/2$

$$\begin{aligned}\sin(x) &= 2\,\sin(x/2)\cos(x/2)\\ \cos(x) &= \cos^2(x/2)-\sin^2(x/2) \quad = 2\,\cos^2(x/2)-1,\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}1+\cos(x) &= 1+2\,\cos^2(x/2)-1 = 2\,\cos^2(x/2)\\ 1+\sin(x) &= 1+2\,\sin(x/2)\cos(x/2) =\\ &= \cos^2(x/2)\left[\frac{1+2\,\sin(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)}\right] =\\ &= \cos^2(x/2)\left[\frac{1}{\cos^2(x/2)}+2\,\tan(x/2)\right] =\\ &= \cos^2(x/2)\left[1+\tan^2(x/2)+2\,\tan(x/2)\right].\end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni ottenute per $1+\cos(x)$ e $1+\sin(x)$ nella funzione integranda, risulta:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\, e^x\, dx &= \frac{1}{2}\int \left[1+\tan^2(x/2)+2\,\tan(x/2)\right]\, e^x\, dx. =\\ &= \int \frac{1}{2}\left[1+\tan^2(x/2)\right]\, e^x\, dx + \int \tan(x/2)\, e^x\, dx\\ &\quad \text{(svolgendo il primo integrale per parti)}\\ &= \tan(x/2)e^x - \int \tan(\frac{x}{2})\, e^x\, dx + \int \tan(\frac{x}{2})\, e^x\, dx =\\ &= \tan(x/2)e^x + c\end{aligned}$$

5. Esercizi Riepilogativi

9. $\int_{-2}^{0} (x+1)(x-2)\,dx.$

10. $\int_{1}^{0} (t^3+t^2)\,dt.$

11. $\int_{1}^{2} \left(3t+\frac{4}{t^2}\right)\,dt.$

12. $\int_{-1}^{-1} 7x^6 dx.$

13. $\int_{0}^{1} (x^{3/2}-x^{1/2})\,dx.$

14. $\int_{0}^{1} (x^{3/4}-2x^{1/2})\,dx.$

15. $\int_{0}^{1} (x+1)^{17} dx.$

16. $\int_{0}^{a} (a^2x-x^3)\,dx.$

17. $\int_{0}^{a} (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 dx.$

18. $\int_{-1}^{1} (x-2)^2 dx.$

19. $\int_{1}^{2} \frac{6-t}{t^3}\,dt.$

20. $\int_{1}^{3} \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx.$

21. $\int_{1}^{2} 2x(x^2+1)dx.$

22. $\int_{0}^{1} 3x^2(x^3+1)\,dx.$

23. $\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx.$

24. $\int_{0}^{\pi} 3\sin x\,dx.$

FIGURA 1. Determinare gli integrali definiti in figura.

Exercises 1–40. Calculate.

1. $\int x e^{-x}\, dx.$

2. $\int_0^2 x 2^x\, dx.$

3. $\int x^2 e^{-x^3}\, dx.$

4. $\int x \ln x^2\, dx.$

5. $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx.$

6. $\int x^3 e^{-x^2}\, dx.$

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\, dx.$

8. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^3}.$

9. $\int_1^{e^2} x \ln \sqrt{x}\, dx.$

10. $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx.$

11. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\, dx.$

12. $\int x^2(e^x - 1)\, dx.$

13. $\int (\ln x)^2\, dx.$

14. $\int x(x+5)^{-14}\, dx.$

15. $\int x^3 3^x\, dx.$

16. $\int \sqrt{x} \ln x\, dx.$

17. $\int x(x+5)^{14}\, dx.$

18. $\int (2^x + x^2)^2\, dx.$

19. $\int_0^{1/2} x \cos \pi x\, dx.$

20. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx.$

21. $\int x^2(x+1)^9\, dx.$

22. $\int x^2(2x-1)^{-7}\, dx.$

23. $\int e^x \sin x\, dx.$

24. $\int (e^x + 2x)^2\, dx.$

25. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx.$

26. $\int x \ln(x+1)\, dx.$

27. $\int x^n \ln x\, dx, \quad n \neq -1.$

28. $\int e^{3x} \cos 2x\, dx.$

29. $\int x^3 \sin x^2\, dx.$

30. $\int x^3 \sin x\, dx.$

FIGURA 2. Determinare gli integrali in figura.

Exercises 1–20. Calculate.

1. $\int \frac{dx}{(2-3x)^2}$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.
3. $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.
4. $\int \sqrt{ax+b}\,dx$.
5. $\int (ax+b)^{3/4}dx$.
6. $\int 2ax(ax^2+b)^4\,dx$.
7. $\int \frac{t}{(4t^2+9)^2}\,dt$.
8. $\int \frac{3t}{(t^2+1)^2}\,dt$.
9. $\int x^2(1+x^3)^{1/4}\,dx$.
10. $\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}\,dx$.
11. $\int \frac{s}{(1+s^2)^3}\,ds$.
12. $\int \frac{2s}{\sqrt[3]{6-5s^2}}\,ds$.
13. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.
14. $\int \frac{x^2}{(1-x^3)^{2/3}}\,dx$.
15. $\int 5x(x^2+1)^{-3}\,dx$.
16. $\int 2x^3(1-x^4)^{-1/4}\,dx$.
17. $\int x^{-3/4}(x^{1/4}+1)^{-2}dx$.
18. $\int \frac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+1}}\,dx$.
19. $\int \frac{b^3x^3}{\sqrt{1-a^4x^4}}\,dx$.
20. $\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{a+bx^n}}\,dx$.

Exercises 21–26. Evaluate.

21. $\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$.
22. $\int_{-1}^0 3x^2(4+2x^3)^2\,dx$.
23. $\int_{-1}^1 \frac{r}{(1+r^2)^4}\,dr$.
24. $\int_0^3 \frac{r}{\sqrt{r^2+16}}\,dr$.
25. $\int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}\,dy$.
26. $\int_{-a}^0 y^2\left(1-\frac{y^3}{a^2}\right)^{-2}\,dy$.

Exercises 27–30. Find the area below the graph of f.

27. $f(x) = x\sqrt{2x^2+1}, \quad x \in [0,2]$.
28. $f(x) = \frac{x}{(2x^2+1)^2}, \quad x \in [0,2]$.
29. $f(x) = x^{-3}(1+x^{-2})^{-3}, \quad x \in [1,2]$.

FIGURA 3. Determinare gli integrali in figura.

45. (a) $\int_2^5 (x-3)\,dx$. (b) $\int_2^5 |x-3|\,dx$.

46. (a) $\int_{-4}^2 (2x+3)\,dx$. (b) $\int_{-4}^2 |2x+3|\,dx$.

47. (a) $\int_{-2}^2 (x^2-1)\,dx$. (b) $\int_{-2}^2 |x^2-1|\,dx$.

48. (a) $\int_{-\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx$. (b) $\int_{-\pi/2}^{\pi} |\cos x|\,dx$.

FIGURA 4. Determinare gli integrali definiti in figura.