Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

13 - Integrali Impropri

Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Consiglio

1. Introduzione

La teoria dell'integrazione vista nelle lezioni precedenti permette di integrare funzioni continue su intervalli limitati. Spesso, però, è necessario integrare funzioni illimitate (con asintoti verticali) e/o con domini di integrazione illimitati (estremi di integrazione a $\pm\infty$).

2. Funzione integranda illimitata

Si consideri il caso in cui la funzione sia continua su $[a, b)$. Su $x = b$ la funzione ha un asintoto, quindi, $f(x)$ non è limitata. Si può dimostrare che sull'intervallo $[a, b]$ la funzione $f(x)$ non ammette integrale secondo Riemann. In questo caso, si dice che $\int_a^b f(x)\,dx$ è un **integrale improprio** con funzione integranda $f(x) \to \infty$ per $x \to b$. E' possibile tuttavia, ottenere una misura dell'area sottesa dalla $f(x)$, oppure quest'area è necessariamente infinita? Una strategia per rispondere a questa domanda è la seguente. Si può pensare di integrare la funzione $f(x)$ sull'intervallo $[a, b-\epsilon]$ (si veda Fig.1) con $\epsilon > 0$ piccolo a piacere. Infatti, in questo intervallo chiuso, la funzione $f(x)$ è continua ed esiste l'integrale secondo Riemann:

$$\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx.$$

A questo punto possiamo far tendere $b - \epsilon$ a b facendo tendere ϵ a 0^+. Il fatto che $\epsilon \to 0^+$ dipende dal fatto che, per costruzione ϵ deve essere una quantità moggiore di zero. Se il limite per $\epsilon \to 0^+$ dell'integrale esiste, ossia, se esiste (finito)

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx,$$

diremo che l'integrale improprio converge.

Definizione Sia f una funzione continua sull'intervallo $[a, b)$ e illimitata per x che tende a b da sinistra, $x \to b^-$. Allora il valore dell'integrale improprio di $f(x)$ su $[a, b]$ è definito da

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx,$$

se il limite esiste. In tal caso si dice che **l'integrale improprio converge**. In caso contrario, si dice che l'integrale improprio diverge.

Esempio 2.1
Esempio di integrale improprio convergente. Valutare il seguente integrale:

$$\int_0^8 (8 - x)^{-\frac{1}{3}} dx$$

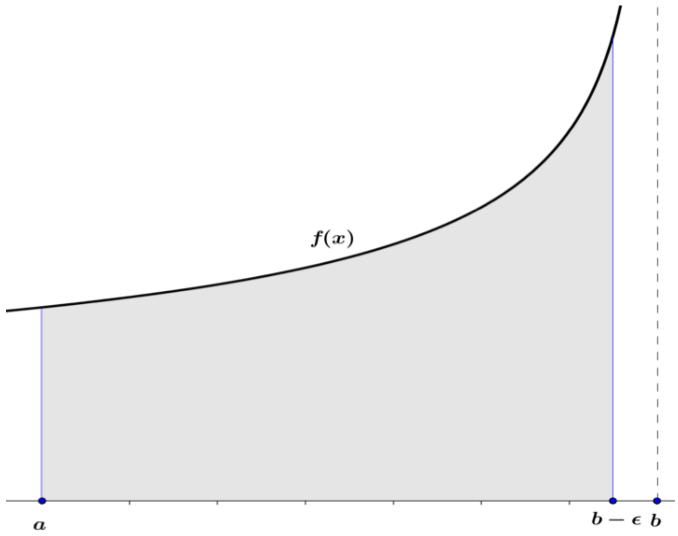

FIGURA 1. Esempio di calcolo di un integrale improprio: caso di funzione integranda illimitata su un intervallo chiuso e limitato.

La funzione integranda ha un asintoto verticale per $x \to 8$, quindi è illimitata. Essendo tuttavia continua in $[0, 8-\epsilon]$ $\forall \epsilon > 0$ piccolo a piacere, possiamo calcolare il valore dell'integrale in $[0, 8-\epsilon]$. Per la definizione vista sopra di integrale improprio abbiamo:

$$\int_0^8 (8-x)^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{8-\epsilon} (8-x)^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[-\frac{3}{2}(8-x)^{\frac{2}{3}} \Big|_0^{8-\epsilon} \right]$$

$$= -\frac{3}{2} \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\epsilon^{\frac{2}{3}} - 8^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{2} 8^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} 4 = 6.$$

Quindi l'integrale improprio converge e il suo valore è 6.

Esempio 2.2
Esempio di integrale improprio divergente. Valutare il seguente integrale:

$$\int_1^3 (3-x)^{-2} dx.$$

Osservando che in $x = 3$ la funzione integranda ha un asintoto verticale, e che la funzione è continua in ogni intervallo $[1, 3-\epsilon]$ con $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, possiamo valutare l'integrale come segue:

$$\int_1^3 (3-x)^{-2} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_1^{3-\epsilon} (3-x)^{-2} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[(3-x)^{-1} \Big|_1^{3-\epsilon} \right] =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\epsilon^{-1} - 2^{-1} \right] = +\infty.$$

Esempio 2.3
Esempio di integrale improprio convergente. Valutare il seguente integrale:

$$\int_0^9 x^{-\frac{1}{2}} dx$$

La funzione integranda ha un asintoto verticale per $x \to 0$, quindi è illimitata: la funzione non è continua nell'estremo inferiore dell'intervallo di integrazione. Essendo tuttavia continua in $[\epsilon, 9]$ $\forall \epsilon > 0$ piccolo a piacere, possiamo calcolare il valore dell'integrale su questo intervallo e poi calcolare il limite del risultato per $\epsilon \to 0$:

$$\int_0^9 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^9 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[2x^{\frac{1}{2}} \Big|_\epsilon^9 \right] = 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[9^{\frac{1}{2}} - \epsilon^{\frac{1}{2}} \right] =$$
$$= 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[3 - \epsilon^{\frac{1}{2}} \right] = 2\,(3 - 0) = 6.$$

Si ipotizzi ora che la funzione integranda $f(x)$ abbia una singolarità nel punto x_0 all'interno dell'intervallo di integrazione $[a, b]$. In questo caso è necessario integrare la funzione su due sub-intervalli aventi in uno degli estremi la singolarità,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx,$$

operazione che può essere fatta in forza dell'additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione. La formula precedente mostra come si debba trasformare il problema del calcolo dell'integrale (improprio) di una funzione con una discontinuità in un punto interno al dominio di integrazione nella somma di due integrali impropri con singolarità in uno dei due estremi. Data questa decomposizione, avremo che $\int_a^b f(x)dx$ esiste se esistono **entrambi** gli integrali $\int_a^{x_0} f(x)dx$ e $\int_{x_0}^b f(x)dx$. In altre parole, se i due limiti a destra e a sinistra della singolarità esistono entrambi, allora l'integrale converge. Se uno dei due limiti (o entrambi) diverge, allora l'integrale diverge.

Esempio 2.4
Esempio di integrale con sigolarità interna all'intervallo. Si valuti il seguente integrale:

$$\int_{-3}^1 (x+1)^{-\frac{1}{5}} dx.$$

La funzione integranda ha un asintoto verticale in $x = -1$. L'integrale dovrà quindi essere decomposto nella somma di due integrali impropri, il primo sull'intervallo $[-3,-1)$ e il secondo su $(-1,1]$.

$$\int_{-3}^{1}(x+1)^{-\frac{1}{5}}dx = \int_{-3}^{-1}(x+1)^{-\frac{1}{5}}dx + \int_{-1}^{1}(x+1)^{-\frac{1}{5}}dx.$$

Nel primo integrale la discontinuità è nell'estremo superiore dell'integrale. Quindi:

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{-1}(x+1)^{-\frac{1}{5}}dx &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-3}^{-1-\epsilon}(x+1)^{-\frac{1}{5}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{5}{4}(x+1)^{\frac{4}{5}}\Big|_{-3}^{-1-\epsilon}\right]\\ &= \frac{5}{4}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[(-\epsilon)^{\frac{4}{5}}-(-2)^{\frac{4}{5}}\right] = \frac{5}{4}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\epsilon^{\frac{4}{5}}-2^{\frac{4}{5}}\right] =\\ &= \frac{5}{4}\left(-2^{\frac{4}{5}}\right) = -5\cdot 2^{-\frac{6}{5}} \cong -2.2.\end{aligned}$$

Valutiamo ora il secondo integrale, in cui la discontinuità è nell'estremo inferiore. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x+1)^{-\frac{1}{5}}dx &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-1+\epsilon}^{1}(x+1)^{-\frac{1}{5}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{5}{4}(x+1)^{\frac{4}{5}}\Big|_{-1+\epsilon}^{1}\right]\\ &= \frac{5}{4}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[2^{\frac{4}{5}}-\epsilon^{\frac{4}{5}}\right] = \frac{5}{4}2^{\frac{4}{5}} = 5\cdot 2^{-\frac{6}{5}} \cong 2.2.\end{aligned}$$

Sommando questi due risultati si ottiene:

$$\int_{-3}^{1}(x+1)^{-\frac{1}{5}}dx = -5\cdot 2^{-\frac{6}{5}} + 5\cdot 2^{-\frac{6}{5}} = 0$$

ATTENZIONE: se NON si suddivide l'intervallo rispetto alla singolarità si può incorrere in errori, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.5
Si consideri il seguente integrale:

$$\int_{-2}^{2}x^{-4}dx.$$

La funzione integranda presenta una discontinuità (non eliminabile) in 0. Quindi dobbiamo calcolare l'integrale come somma di integrali sugli intervalli $[-2,0)$ e $(0,2]$. Abbiamo:

$$\int_{-2}^{2} x^{-4}dx = \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\int_{-2}^{0-\epsilon_1} x^{-4}dx + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\int_{0+\epsilon_2}^{2} x^{-4}dx =$$

$$= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\left[-\frac{1}{3}x^{-3}\Big|_{-2}^{-\epsilon_1}\right] + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\left[-\frac{1}{3}x^{-3}\Big|_{\epsilon_2}^{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{\epsilon_1\to 0^+}\left[\epsilon_1^{-3} - 2^{-3}\right] - \frac{1}{3}\lim_{\epsilon_2\to 0^+}\left[2^{-3} - \epsilon_2^{-3}\right] =$$

$$= +\infty + \infty = +\infty.$$

Quindi l'integrale diverge. Se non ci fossimo accorti della discontinuità in 0 e avessimo integrato su tutto il dominio senza suddividere l'integrale nella somma di due integrali, avremmo ottenuto:

$$\int_{-2}^{2} x^{-4}dx = -\frac{1}{3}x^{-3}\Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{3}\left[2^{-3} - (-2)^{-3}\right] = -\frac{1}{3}\left[2^{-3} + 2^{-3}\right] =$$

$$= -\frac{1}{12}.$$

Questo risultato è SBAGLIATO! Notate che, anche non sapendo il risultato corretto dell'integrale, che abbiamo visto essere divergente, ci potremmo accorgere del fatto che il risultato $-\frac{1}{12}$ sia sbagliato, osservando che il valore ottenuto è negativo, mentre la funzione integranda è positiva in tutto il dominio. Questa osservazione (a posteriori) non è sempre possibile, tuttavia è buona norma eseguire sempre controlli a posteriori della sensatezza di un risultato.

3. Intervalli illimitati

Si ipotizzi di voler calcolare l'integrale di una funzione in un intervallo illimitato, $(-\infty, b]$ oppure $[a, \infty)$. Come per gli integrali con funzione integranda illimitata, tali integrali sono detti **impropri**. Per determinare il loro valore si può ricorrere allo stesso espediente visto sopra, ovvero, integrare la funzione su un intervallo limitato, $[M, b]$ oppure $[a, N]$, rispettivamente, e poi fare tendere M a $-\infty$, oppure N a $+\infty$, rispettivamente. Se il limite esiste, diremo che l'integrale **converge**.

Definizione Sia $f(x)$ una funzione continua su $[a, +\infty)$. Il valore dell'integrale improprio di f su $[a, +\infty)$ è definito da:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\int_{a}^{N} f(x)dx.$$

Se tale limite esiste, diremo che l'integrale improprio **converge** al valore ottenuto, altrimenti diremo che l'integrale improprio **diverge**.

In maniera analoga, se $g(x)$ è una funzione continua su $(-\infty, b]$, allora definiamo l'integrale improprio di g su $(-\infty, b]$ come

$$\int_{-\infty}^{b} g(x)dx = \lim_{M\to-\infty}\int_{M}^{b} g(x)dx,$$

se il limite esiste. In tal caso diremo che l'integrale improprio **converge**. In caso contrario diremo che l'integrale improprio **diverge**.

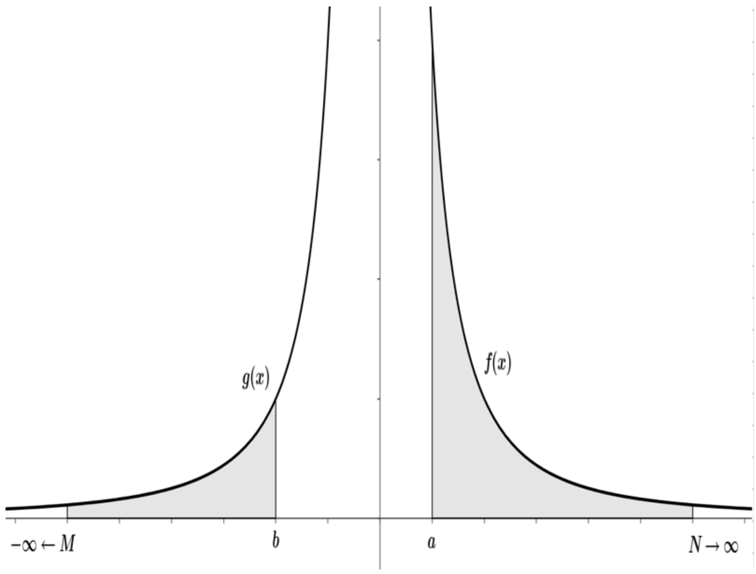

FIGURA 2. Esempio di calcolo di un integrale improprio: caso di integrale improprio su un intervallo illimitato.

Esempio 3.1
Determinare, se esiste, il valore del seguente integrale improprio.

$$\int_{1}^{+\infty} x^{-2}dx.$$

Utilizzando la definizione data sopra si ha che:

$$\int_{1}^{+\infty} x^{-2}dx = \lim_{N\to+\infty}\int_{1}^{N} x^{-2}dx = \lim_{N\to+\infty}\left[-x^{-1}\Big|_{1}^{N}\right] =$$
$$= -\lim_{N\to+\infty}\left[N^{-1}-1\right] = -[0-1] = 1.$$

Quindi l'integrale improprio converge e il suo valore è 1.

Esempio 3.2
Determinare il valore dell'integrale improprio
$$\int_{-\infty}^{-8} x^{-\frac{1}{3}} dx.$$
Abbiamo:
$$\int_{-\infty}^{-8} x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{M \to -\infty} \int_{M}^{-8} x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{M \to -\infty} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{M}^{-8} =$$
$$= \lim_{M \to -\infty} \frac{3}{2}(4 - M^{\frac{2}{3}}) = -\infty.$$
Quindi l'integrale diverge.

Esempio 3.3
Si studi l'integrale
$$\Gamma(t) = \int_{0}^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad \text{con} \quad t > 0.$$
La funzione $\Gamma(t)$ è detta **funzione gamma** e, oltre ad avere svariate applicazioni in calcolo delle probabilità, consente di generalizzare il concetto di **fattoriale** a numeri reali. Vogliamo verificare che nel caso in cui $t = n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, allora
$$\Gamma(n) = (n-1)!$$
Procediamo per induzione matematica. Vediamo se la proprietà è verificata per piccoli numeri. Poniamo, quindi, $n = 1$. Abbiamo:
$$\Gamma(1) = \int_{0}^{+\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{N \to +\infty} \int_{0}^{N} e^{-x} dx =$$
$$= \lim_{N \to +\infty} \left[-e^{-x} \Big|_{0}^{N} \right] = - \lim_{N \to +\infty} \left[e^{-N} - 1 \right] = -[0-1] = 1 = 0!$$
Quindi, per $n = 1$, la relazione $\Gamma(n) = (n-1)!$ è verificata. Supponiamo ora (ipotesi induttiva) che tale relazione sia vera per n, ossia che
$$\Gamma(n) = \int_{0}^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!,$$
e dimostriamo che essa è vera per $n+1$. Dobbiamo quindi dimostrare che
$$\Gamma(n+1) = \int_{0}^{+\infty} x^{n} e^{-x} dx = n!.$$

Abbiamo che:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N x^n e^{-x} dx =$$

(integrando per parti) =

$$= \lim_{N\to+\infty} \left[-e^{-x}x^n\Big|_0^N + \int_0^N n x^{n-1} e^{-x} dx \right] =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \left[-e^{-x}x^n\Big|_0^N + n \int_0^N x^{n-1} e^{-x} dx \right] =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \left[-e^{-x}x^n\Big|_0^N \right] + n \lim_{N\to+\infty} \int_0^N x^{n-1} e^{-x} dx =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \left[-e^{-x}x^n\Big|_0^N \right] + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx =$$

$$\left(\text{notando che, per definizione, } \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \Gamma(n) \right)$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \left[-e^{-x}x^n\Big|_0^N \right] + n\,\Gamma(n) =$$

(ricordando che, per hp. induttiva, $\Gamma(n) = (n-1)!$
e che $n\,(n-1)! = n!$ per definizione di !)

$$= \lim_{N\to+\infty} \left[-e^{-x}x^n\Big|_0^N \right] + n! =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \left[-e^{-N}N^n + 0 \right] + n! = -\lim_{N\to+\infty} \left[\frac{N^n}{e^N} \right] + n! =$$

$$= -0 + n! = n!,$$

che è quanto volevasi dimostrare.

Esercizi 3.1

Determinare se i seguenti integrali impropri convergano. Se convergono, calcolarne il valore.

$$\int_{-5}^{2} \ln(x+5)dx; \qquad \int_0^1 \frac{\ln^{\frac{1}{3}}(x)}{x}dx; \qquad \int_0^1 \ln^2(x)dx;$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1-x)}dx; \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}dx; \qquad \int_0^3 \frac{x}{x^2-2}dx;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x\,(x-1)}dx; \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^x}{(e^x+1)^3}dx; \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx;$$