Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
CdS Statistica per l'Analisi dei Dati

Appunti del corso di Matematica

15 - Successioni Numeriche e di Funzioni

Anno Accademico 2013/2014

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Consiglio

1. Successioni numeriche

Si consideri una funzione $g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni numero naturale, n, un numero reale $g(n)$. Per esempio, $g(n) = \frac{1}{n}$ genera la seguente sequenza di numeri reali:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

Graficamente:

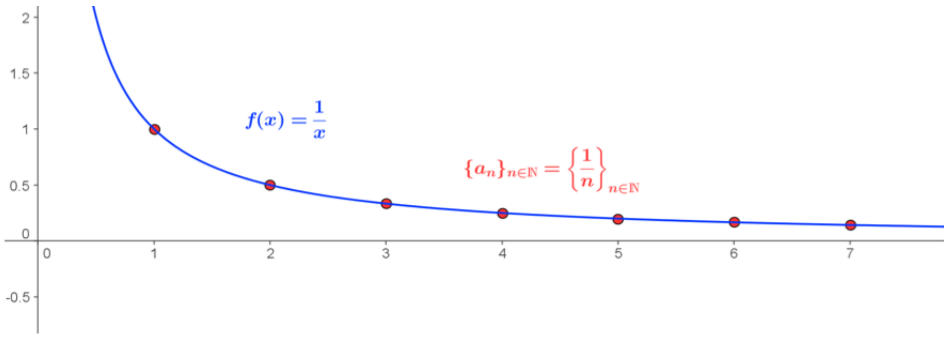

FIGURA 1. Successione $g(n) = \frac{1}{n}$

Si può anche visualizzare la sequenza dei punti $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sull'asse delle ascisse in modo da evidenziare soltanto la progressione di tali valori come elementi di un intervallo reale.

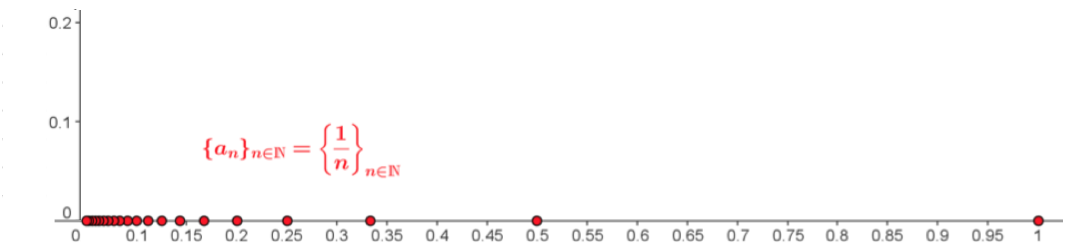

FIGURA 2. Successione $g(n) = \frac{1}{n}$

Si osservi che i punti della sequenza $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergono al valore limite zero.

Definizione di successione

Si definisce **successione** una funzione dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Una successione si denota come segue:
$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, oppure $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, oppure con $\{a_n\}$, o, a volte, se non c'è ambiguità e con un certo abuso di linguaggio, con a_n.

Esempio 1.1

- $\{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}};$
- $\{-1, 1, -1, 1, ..., (-1)^n, ...\} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}};$
- $\{2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, ..., 2^{-n}, ...\} = \{2^{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}.$

Una successione può anche essere definita **ricorsivamente**. Ad esempio: $\{t_n\}$ sia una successione definita da:

$$t_1 = 1 \text{ e } t_{n+1} = \frac{3 + t_n}{2}.$$

Definizione di successione monotona

Una successione si dice **crescente** (**decrescente**) se $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n < m$ allora $a_n < a_m$ ($a_n > a_m$).

Una successione si dice **non decrescente** (**non crescente**) se $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n < m$ allora $a_n \leq a_m$ ($a_n \geq a_m$).

Una successione che soddisfi una delle precedenti proprietà è detta **monotona**.

Esempio 1.2

- La successione $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ è crescente. Infatti:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/(n+2)}{n/(n+1)} = \frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)} = \frac{n^2 + 1 + 2\,n}{n^2 + 2\,n} > 1.$$

- La successione $\{a_n\} = \left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ è non crescente. Infatti:

$$a_1 = \frac{2}{1} = \frac{2^2}{2} = a_2 \text{ e per } n \geq 2$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \frac{2^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,2^n} = \frac{2\,\cancel{2^n}\,\cancel{n!}}{(n+1)\,\cancel{n!}\,\cancel{2^n}} < 1$$

Delle successioni siamo interessati a studiare il comportamento per $n \to \infty$. Dobbiamo dunque introdurre il concetto di limite di una successione.

Definizione di limite di una successione

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette limite L, e scriveremo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,$$

se $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon$ allora:

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

In tal caso si dice che la successione **converge** al limite L.

Come per le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, è possibile stabilire se una successione converge direttamente dalla definizione di limite, oppure utilizzando le proprietà del limite di una successione. Si osservi che è quasi sempre possibile associare ad una successione una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che abbia lo stesso carattere e che, eventualmente, converga allo stesso limite. E' possibile dimostrare che tutte le proprietà che abbiamo visto per i limiti di funzioni, come le regole sul limite di una somma, oppure del prodotto di una funzione per una costante, il teorema del confronto, ecc. , ed escluso il teorema di de l'Hôpital, per ovvi motivi, valgono anche per i limiti di successioni. Ad esempio,

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty,$$

quindi la successione $\{n^2\}$ non converge—nel caso specifico diremo che essa **diverge**.
Non è tuttavia sempre possibile operare in tale modo. Ad esempio, la successione $\{(-1)^n\}$ non ha un'equivalente funzione reale da associare. In questo caso, si può analizzare il comportamento della successione attraverso la definizione di limite e mostrare che la successione $\{(-1)^n\}$ non converge. In particolare, mentre la successione $\{n\}$ è **divergente**, la successione $\{(-1)^n\}$ si dice essere **indeterminata** oppure, più specificamente, **oscillante**.

Definizione di successione limitata
Una successione $\{a_n\}$ si dice **limitata** se esiste un intervallo $[a, b] \in \mathbb{R}$ limitato tale che: $\{a_n\} \subset [a, b]$.

Nell'esempio introduttivo, la successione (convergente) $\{\frac{1}{n}\}$ è contenuta nell'intervallo $[0, 1]$, così come la successione $\{(-1)^n\}$ (non convergente) è contenuta nell'intervallo $[-1, 1]$. E' dunque importante NON confondere i concetti di limitatezza e convergenza: esistono successioni, come $\{(-1)^n\}$, che sono limitate ma NON sono convergenti. Valgono tuttavia i seguenti teoremi:

Teorema 1.1. *Se una successione $\{a_n\}$ ammette limite, ossia è convergente, allora $\{a_n\}$ è limitata. In formule:*

$$\text{Se } \lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \Rightarrow \quad \{a_n\} \text{ è limitata.}$$

Si noti che l'implicazione è diretta ($\Rightarrow$) e non vale il viceversa. Ossia, NON è vero, in generale, che se una successione è limitata allora è convergente. Se, tuttavia, si considerano successioni monotone allora vale il seguente teorema.

TEOREMA 1.2. *Se una successione* $\{a_n\}$ *è* **monotona** *e* **limitata** *allora la successione* $\{a_n\}$ *è convergente, ossia ammette limite* L.

Si osservi che, anche in questo caso, non vale l'implicazione opposta. Infatti esistono successioni, come $\{(-\frac{1}{2})^n\}$, oppure $\{((-1)^{n+1}\frac{1}{n})\}$, che sono convergenti, ma NON sono monotone, sebbene limitate (si veda la figura 3 di seguito).

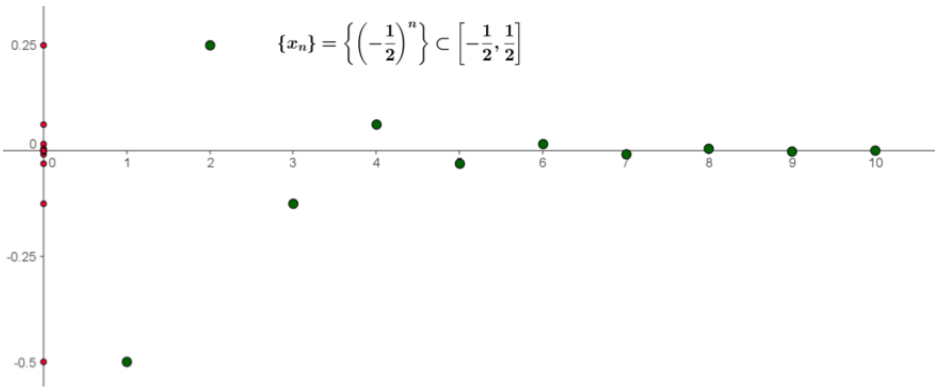

FIGURA 3. Successione $\{(-\frac{1}{2})^n\}$

Abbiamo visto che uno strumento molto utile per calcolare il limite di funzioni è il metodo di del'Hôpital. Esistono due teoremi, che enunciamo di seguito, i quali rappresentano l'equivalente del metodo di del'Hôpital per i limiti di successioni.

TEOREMA 1.3 (Primo teorema di Cesàro). *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni che tendono a zero per* $n \to \infty$. *Supponiamo inoltre che* $\{b_n\}$ *sia crescente o decrescente. Se esiste*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

TEOREMA 1.4 (Secondo teorema di Cesàro). *Sia* $\{b_n\}$ *una successione di numeri positivi (negativi) che diverge positivamente (negativamente) crescendo (decrescendo). Sia inoltre* a_n *un'arbitraria successione. Se esiste*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Esercizio 1.1
Dimostrare, usando il secondo teorema di Cesàro, che:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1.$$

2. Successioni di funzioni

Si consideri la seguente successione
$$\{a_n\} = \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}.$$
E' evidente che, fissato $x = x_0$, la successione $\{a_n\}$ diventa una normale successione numerica, di cui possiamo studiare il carattere (convergente, divergente, oscillante, limitata) ed eventualmente calcolarne il limite con i metodi già visti. Il modo di studiare una successione come $\{a_n\}$, in generale, consiste nel studiarne il comportamento per i diversi valori che la variabile $x \in \mathbb{R}$ può assumere. Nel caso specifico, se $-1 < x \leq 1$ la successione sarà convergente. Infatti, in questo caso, la successione risulta limitata: $\{a_n\} \subset [-1, 1]$. Inoltre, per $x \in [0, 1]$ essa è monotona:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{x^n} = x < 1.$$
Dunque per $x \in [0, 1]$ la successione è limitata e monotona (decrescente) dunque convergente e tende al limite L=0. Per $x \in]-1, 0[$ la dimostrazione sfrutta il fatto che il termine $n-$esimo della successione può essere scritto come $a_n = (-1)^n\,|x|^n$, ossia come il prodotto di due successioni, una oscillante $(-1)^n$ e una, $|x|^n$, tendente a zero (tenuto conto che $0 < |x| < 1$). Dunque la successione pure tenderà a zero (poiché $-1 \cdot 0 = +1 \cdot 0 = 0$). Nel caso in cui $x = -1$, $\{a_n\}$ si riduce alla successione oscillante $\{(-1)^n\}$ che dunque non converge. Infine per $x > 1$ o $x < -1$ la successione è illimitata e quindi (per contronominale del teorema 1.1) non è convergente. Una rappresentazione grafica della successione $\{x^n\}$ è riportata in figura 4 per diversi valori di x.
In generale possiamo considerare la successione vista sopra come una successione di funzioni dove ad ogni numero naturale n è associata una funzione $f_n(x)$ (nel nostro esempio $f_n(x) = x^n$). Siamo ora pronti per una definizione formale di successione di funzioni.

Definizione di successione di funzioni
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo reale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri una funzione $f_n : I \to \mathbb{R}$. Il simbolo
$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$$
indica la successione di funzioni
$$\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), ..., f_n(x), ...\}.$$

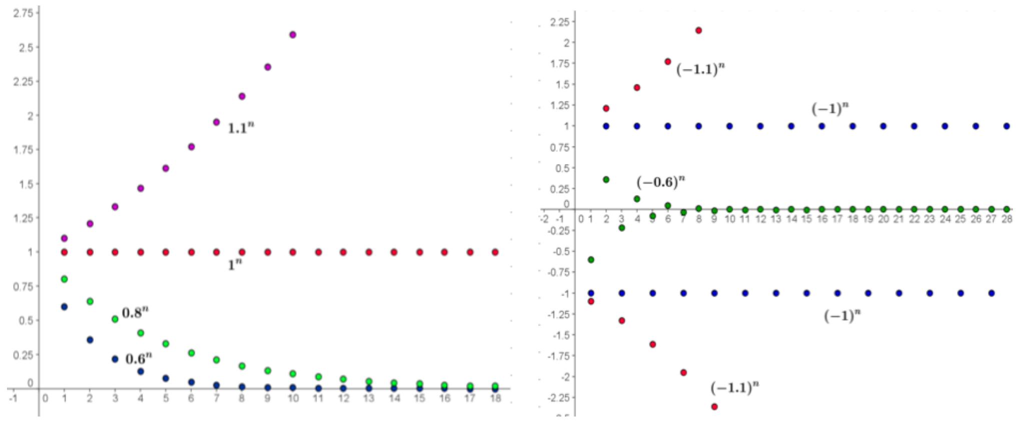

FIGURA 4. Successione $\{x^n\}$ per diversi valori di $x \in \mathbb{R}$

Come visto nell'esempio precedente, per ogni $x \in I$ fissato (per esempio $x = 3$, oppure $x = 2$), la successione di funzioni diventa una successione numerica con un comportamento specifico (convergente, divergente, ecc.). Si ipotizzi che per ogni $x \in I$ (fissato) la corrispondente successione numerica $\{f_n(x)\}$ sia convergente e che tenda ad un limite L_x. Questo limite, dunque, dipenderà dal valore assegnato alla variabile x, ossia $L_x = f(x)$. In altri termini, mentre una successione numerica tende ad un numero reale L, una successione di funzioni (quando converge) converge ad una funzione reale $f(x)$.

Definizione di convergenza puntuale Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$. Diremo che la successione $\{f_n(x)\}$ **converge puntualmente** su I alla funzione $f : I \to \mathbb{R}$ e scriveremo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

se $\forall x \in I$ e $\forall \epsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{N}$ (M dipendente da x e ϵ) tale che $\forall n > M$ allora

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Esempio 2.1

• La successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = k$, con k costante (funzioni costanti) convergono alla funzione constante $f(x) = k$.

• La successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge alla funzione $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

• La successione di funzioni $\{f_n(x)\} = \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (si veda l'esempio introduttivo) converge $\forall x \in]0,1]$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ x \in]-1,1[\\ 1 & \text{se } \ x = 1 \end{cases}$$

Un interessante risultato dello studio delle successioni di funzioni è quello relativo alla successione:

$$\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Si dimostra infatti che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Dimostrazione. Possiamo calcolare il precedente limite come fatto, in precedenza per i limiti di funzioni. Prima di tutto osserviamo che, se il limite esiste, allora:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left[1+\frac{x}{n}\right]}.$$

Quindi possiamo limitarci a calcolare il limite all'esponente di e:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left[1+\frac{x}{n}\right].$$

Se poniamo $y=\frac{x}{n}$, ossia, $n=\frac{x}{y}$, allora avremo che $\forall x$ finito $\lim_{n\to\infty} y = 0$. Possiamo quindi calcolare il precedente limite come un usuale limite di una funzione nella variabile y per $y\to 0$. Infatti, sostituendo otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left[1+\frac{x}{n}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{x}{y}\ln\left[1+y\right] = x\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left[1+y\right]}{y} = x\cdot 1 = x,$$

dove abbiamo sfruttato il limite notevole $\lim_{y\to 0}\frac{\ln[1+y]}{y}=1$. Dunque

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left[1+\frac{x}{n}\right]} = e^x.$$

$\square$

Nella figura 5, riportata di seguito, è rappresentata la successione $\{f_n(x)\} = \{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\}$ per $x\in\{-0.5, 0.5, 1.0, 1.5\}$. Per $n\to\infty$ la successione tende a degli asintoti (questa espressione è impropria visto che n è una variabile discreta, però rende l'idea) rappresentati dalle rette tratteggiate di colore verde. Si noti che tali rette orizzontali anno equazione $y=e^{-0.5}$, $y=e^{0.5}$, $y=e$, $y=e^{1.5}$, rispettivamente.
Questo risultato ha importanti applicazioni pratiche in diversi ambiti. Ad esempio, in ambito economico finanziario, esso consente di definire il concetto di capitalizzazione continua degli interessi. Si ipotizzi che la remunerazione per un investimento sia $\delta = 3\%$. Se investo 1€, dopo un anno potrò riscuotere il capitale iniziale (1€) più gli interessi su 1€, ossia $1\cdot\delta = 1\cdot 3\% = 1\cdot 0.03 = 0.03$€. Quindi il valore del mio investimento, come mostrato graficamente nel pannello in alto di figura 6, dopo un anno sarà:

$$V(1) = 1 + 0.03.$$

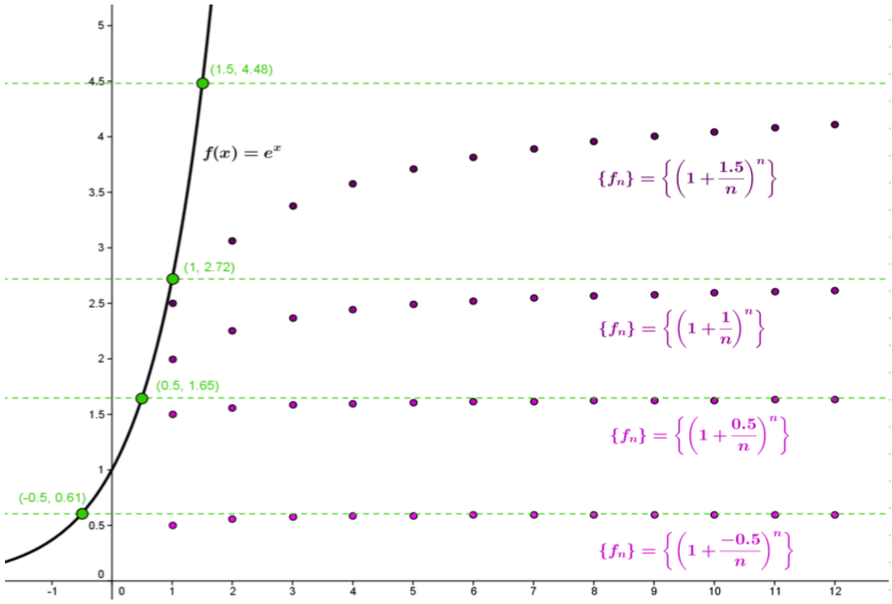

FIGURA 5. Rappresentazione della successione di funzioni $\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\}$ per $x \in \{-0.5, 0.5, 1.0, 1.5\}$.

Un'altra possibilità consiste nell'investire 1€per 6 mesi, riscuotere capitale e interessi maturati, e reinvestire la somma ottenuta per altri 6 mesi. E' ovvio che se per un anno riscuoto il 3% di interessi, per 6 mesi (0.5 anni) riscuoterò 0.03/2€. Pertanto:

$$V(0.5) = 1 + \frac{0.03}{2}.$$

Reinvestendo (tutto) questo capitale per altri 6 mesi, guadagnerò il $\frac{3}{2}\% = 1.5\%$ di interessi su (tutto) $V(0.5)$. Quindi, in totale dopo un anno riscuoterò:

$$\begin{aligned} V(1) &= V(0.5) + \frac{0.03}{2} \cdot V(0.5) = V(0.5) \cdot \left(1 + \frac{0.03}{2}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{0.03}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{0.03}{2}\right) = \left(1 + \frac{0.03}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Questo calcolo è riportato graficamente nel pannello in basso di figura 6. Si può ripetere l'esercizio appena visto dividendo l'anno in n=3 quadrimestri, n=4 trimestri, n=6 bimestri, n=12 mesi, n=52 settimane, n=365 giorni e così via. Quindi sarà:

$$V(1) = \left(1 + \frac{0.03}{3}\right)^3 \quad \text{(quadrimestrale)}$$

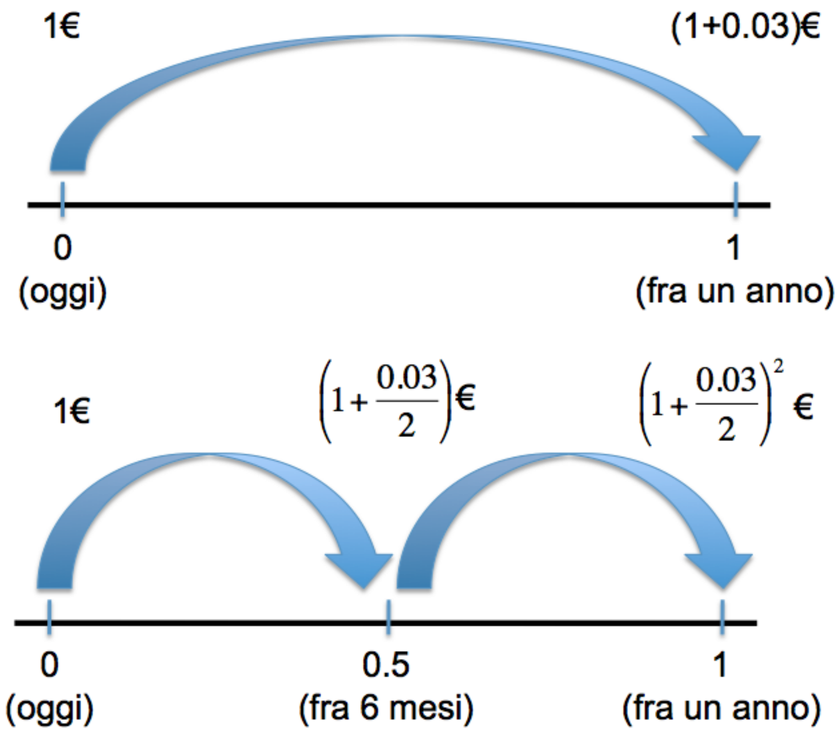

FIGURA 6. Rappresentazione grafica del valore di un investimento al tasso del 3% annuo dopo un anno (pannello in alto) e con scadenza semestrale (pannello in basso).

$$V(1) = \left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^4 \quad \text{(trimestrale)}$$

$$\vdots$$

$$V(1) = \left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{12} \quad \text{(mensile)}$$

$$\vdots$$

$$V(1) = \left(1 + \frac{0.03}{365}\right)^{365} \quad \text{(giornaliero)}$$

$$\vdots$$

$$V(1) = \left(1 + \frac{0.03}{n}\right)^n \quad \text{(n-periodale)}$$

La domanda è: “se ipotizziamo sia possibile una capitalizzazione degli interessi **continua**, cioè con il periodo $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$, il capitale finale (dopo un anno) sarà finito o infinito?” In altri termini, ci si deve chiedere se la successione di funzioni

$$\{f_n(\delta)\}_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^n \right\}$$

sia convergente o divergente. Come abbiamo visto, questa successione è convergente e converge al valore e^{δ}. Quindi, nel nostro caso, il capitale dopo un anno di capitalizzazione continua degli interessi sarà pari a:

$$V(1) = e^{0.03}\,€.$$