Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
CdS Statistica per l'Analisi dei Dati

Appunti del corso di Matematica

16 - Serie Numeriche

Anno Accademico 2013/2014

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Consiglio, S. Piraino

1. Serie numeriche

Si consideri la successione numerica $\{(\frac{1}{2})^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. I primi n termini della successione sono $\{0.5, 0.25, 0.125, \dots, (\frac{1}{2})^n\}$. Si considerino adesso le somme dei primi n termini della successione e si indichino come segue:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0.5 \\ s_2 &= 0.5 + 0.25 \\ s_3 &= 0.5 + 0.25 + 0.125 \\ &\vdots \\ s_n &= 0.5 + 0.25 + 0.125 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

I termini indicati con s_i sono chiamati **somme parziali**. Queste somme parziali costituiscono esse stesse una successione che prende il nome di **successione delle somme parziali**. La seguente definizione mostra come il concetto di serie sia strettamente legato a quello di successione delle somme parziali.

Definizione di serie

Sia $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ una successione di numeri reali. Si definisce **serie** la successione delle somme parziali $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definita come:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \\ &\dots \end{aligned}$$

Si definisce, inoltre, **somma della serie** il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Si osservi che:

- (1) di solito, con la scrittura $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ si usa riferirsi non solo alla somma della serie, ma anche alla serie stessa, ossia alla successione delle somme parziali. Inoltre l'indice i di a_i è un indice muto, cioè può essere sostituito da k o da qualsiasi altro simbolo. Esso prende valori a partire dal primo valore della successione $\{a_n\}$, quindi, il primo valore di i può anche essere diverso da 1. Il termine a_i (con i generico) viene detto **termine generale della serie**.
- (2) La successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è una successione nel senso proprio del termine. Quindi ad essa si applicano tutte le definizioni, i teoremi e le proprietà viste per le successioni.

- (3) Il carattere della serie è espresso dal carattere della successione delle somme parziali. Essendo, infatti, $\{s_n\}$ una successione, questa può essere convergente, divergente o indeterminata. Questo implica anche che non necessariamente la somma di infiniti termini, anche tutti positivi, sia infinita. In particolare, se al crescere indefinitamente di n , s_n converge ad $S \in \mathbb{R}$, possiamo attribuire all'espressione un significato numerico scrivendo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

dicendo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente e che ha somma S .

Se al crescere indefinitamente di n , s_n è divergente, positivamente o negativamente, scriveremo rispettivamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty.$$

e diremo che la serie è divergente, positivamente o negativamente. Se s_n non converge ne diverge, diremo che la serie è indeterminata.

Riguardo il punto (3), ad esempio, lo studio del carattere della serie geometrica permette di risolvere uno dei famosi **paradossi di Zenone**, quello contro il movimento, o **paradosso di Achille e della tartaruga**. Il paradosso può essere descritto nei seguenti termini. Achille e la tartaruga fanno una gara. Achille decide di dare un vantaggio alla tartaruga, di una certa distanza d . Ad ogni istante Achille dimezza la sua distanza dalla tartaruga. Quindi, questa distanza inizialmente sarà d poi diventerà $d/2$, poi, ancora $d/4$ e così via. Eppure visto che possiamo continuare a dividere all'infinito la distanza tra i due, la conclusione di Zenone è che Achille non raggiungerà mai la tartaruga. Vediamo, tuttavia, che utilizzando la teoria delle serie, è possibile mostrare che Achille raggiungerà la tartaruga e lo farà dopo avere percorso una piccola distanza. Infatti se la distanza tra i due si dimezza ad ogni istante, la distanza percorsa da Achille sarà:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{d}{2} \\ s_2 &= \frac{d}{2} + \frac{d}{2^2} \\ s_3 &= \frac{d}{2} + \frac{d}{2^2} + \frac{d}{2^3} \\ &\vdots \\ s_n &= d \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

E' evidente che $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = d \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ rappresenta lo spazio complessivo percorso da Achille prima di raggiungere la tartaruga. Calcoliamo

questo limite nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} d \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k &= d \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \\
 &= d \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \\
 &= d \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \\
 &= d \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = d \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = d.
 \end{aligned}$$

Quindi, Achille raggiungerà la tartaruga appena avrà percorso lo spazio che le aveva dato di vantaggio. Incidentalmente, abbiamo dimostrato che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

Questa serie appartiene ad una classe più ampia di serie convergenti dette **serie geometriche**.

1.1. La serie geometrica. Consideriamo la serie

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k-1}$$

essendo x un numero reale arbitrario.

Dal fatto che i termini della serie sono in *progressione geometrica* di ragione x , la serie prende il nome di *serie geometrica*.

È evidente che il comportamento o carattere della serie dipende dal valore di x .

Se $x = 1$ la serie diviene la somma di infiniti 1 e pertanto $S_n = n$. Conseguentemente, essendo $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, la serie è divergente.

Se $x \neq 1$, S_n , per una nota formula sulle progressioni geometriche (che si ricava ragionando come nell'esempio precedente sul paradosso di Zenone), assume l'espressione

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x}$$

Se $|x| < 1$, poichè $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$, S_n converge a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

e quindi la serie converge.

Se $x > 1$, poichè $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = +\infty$, la serie diverge a $+\infty$.

Se $x \leq -1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n$ non esiste e di conseguenza la serie geometrica è indeterminata.

Esempio 1.1

Consideriamo la *serie di Mengoli*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

di cui la somma parziale di ordine n è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Essendo il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

la serie considerata è convergente ed ha somma 1.

1.2. Prima osservazione. Date m serie, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{(1)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{(2)}$, $\dots$,

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{(m)}$, tutte convergenti con rispettive somme $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $\dots$, $S^{(m)}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (c_1 a_n^{(1)} + c_2 a_n^{(2)} + \cdots + c_m a_n^{(m)})$$

combinazione lineare delle serie date attraverso le costanti reali c_1 , c_2 , $\dots$, c_m , è convergente ed ha per somma la combinazione lineare, attraverso le stesse costanti, della somma delle singole serie, ossia

$$c_1 S^{(1)} + c_2 S^{(2)} + \cdots + c_m S^{(m)}$$

Indicando con $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, $\dots$, $S_n^{(m)}$, le somme parziali di ordine n delle serie date, la somma parziale S_n della serie combinazione lineare è

$$S_n = c_1 S_n^{(1)} + c_2 S_n^{(2)} + \cdots + c_m S_n^{(m)}$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= c_1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{(1)} + c_2 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{(2)} + \dots + c_m \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{(m)} = \\ &= c_1 S^{(1)} + c_2 S^{(2)} + \dots + c_m S^{(m)} \end{aligned}$$

c.v.d.

1.3. Seconda osservazione. Sia data la serie

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Se in essa sopprimiamo i primi p termini si ottiene una nuova serie

$$a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_{p+n} + \dots$$

a cui si da il nome di *resto di ordine p* della serie data. Le due serie differiscono per un numero finito di termini. Possiamo quindi dire che:

Il resto di ordine p di una data serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è una nuova serie che ha lo stesso carattere della serie data. Se la serie data è convergente con somma S , il suo resto di ordine p è una serie convergente con somma uguale a

$$S - (a_1 + a_2 + \dots + a_p)$$

Viceversa se il resto è convergente con somma R , la serie data è convergente con somma

$$R + a_1 + a_2 + \dots + a_p$$

2. Serie a termini di segno costante

Intendiamo affrontare lo studio delle serie i cui termini sono tutti dello stesso segno, che supponiamo non negativo.

TEOREMA 2.1. *Una serie a termini non negativi è convergente o divergente e ha per somma l'estremo superiore dell'insieme numerico costituito dai valori distinti assunti dalla somma parziale S_n .*

DIMOSTRAZIONE. Essendo per ipotesi gli $a_n \geq 0$ allora la successione delle somme parziali è non decrescente e quindi, richiamando il teorema sui limiti delle successioni monotone, il limite di S_n esiste ed è finito o $+\infty$. $\square$

TEOREMA 2.2 (Criterio del confronto). *Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi. Se definitivamente*

$$a_n \leq c b_n$$

essendo c una costante reale positiva, allora dalla convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ segue la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, dalla divergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ segue la divergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con S_n e T_n le somme parziali di ordine n , rispettivamente, della prima e della seconda serie. Dall'ipotesi che $a_n \leq c b_n$ segue che

$$S_n \leq c T_n$$

Passando al limite si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq c \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$$

Pertanto se $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ è finito anche il limite di S_n è finito e di conseguenza la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente; se $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ è $+\infty$ anche il limite di T_n è $+\infty$ e di conseguenza la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è divergente $\square$

Esempio 2.1

Consideriamo la *serie armonica generalizzata* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$.

Nel caso in cui $0 < \alpha \leq 1$ è evidente che $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$

Essendo la *serie armonica* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergente anche la serie data, con $0 < \alpha < 1$ è divergente.

Dimostriamo più avanti che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, con $\alpha > 1$, è convergente.

TEOREMA 2.3 (Criterio del confronto nella forma di limite). *Siano* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *due serie a termini positivi. Se esiste finito e diverso da zero il* $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *le serie date hanno lo stesso carattere.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti posto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$, per la definizione di limite finito, esiste, posto $\epsilon = \frac{l}{2}$, definitivamente la relazione

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2} l \Leftrightarrow \frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} l b_n$$

da cui

$$\frac{l}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \frac{3}{2} l \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

che implica la tesi.

In particolare

se $l \geq 0$ dalla convergenza della $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ segue la convergenza della $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$;
 se $l \neq 0$ dalla divergenza della $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ segue la divergenza della $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. $\square$

Una conseguenza del criterio del confronto nella forma di limite (2.3) è la seguente:

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi ed esista un $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha a_n = l$$

allora

- (1) se $l \in [0, +\infty[$ e $\alpha > 1$ la serie data è convergente;
- (2) se $l \in]0, +\infty[$ e $\alpha \leq 1$ la serie data è divergente.

Vediamo alcuni esempi sulle serie e sui criteri di convergenza fino a qui sviluppati.

Esempio 2.2

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

La serie considerata, scritta nella forma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, coincide con la serie armonica generalizzata con $\alpha = \frac{1}{3}$. Pertanto la serie data diverge positivamente.

Esempio 2.3

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt[3]{n}}$.

essendo $\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad \forall n > 2$

Utilizzando il criterio del confronto, deduciamo che la serie data è divergente perchè minorata da una serie divergente.

Esempio 2.4

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[2n]{n}} + \frac{1}{n} \right)^n$.

Essendo

$$\left(\frac{1}{\sqrt[2n]{n}} + \frac{1}{n} \right)^n > \left(\frac{1}{\sqrt[2n]{n}} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

considerato che la serie minorante diverge positivamente, anche la serie data diverge positivamente.

Esempio 2.5

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right)$.

Confrontiamo la serie con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, considerando il limite di $n^2 a_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}{\frac{1}{n^2}} = \ln e = 1$$

Essendo $\alpha = 2$ la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, pertanto è convergente.

Esempio 2.6

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n+1)}$.

L'espressione del termine generale della serie suggerirebbe di confrontare la serie con la serie di termine generale $\frac{1}{\sqrt{n}}$, tuttavia passando al limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \ln(n+1)} = 0$$

essendo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $l = 0$, il criterio non permette di desumere il

carattere della serie data. Se invece confrontiamo con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$,

ci rendiamo conto che la serie è divergente. Infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)} = +\infty$$

Esempio 2.7

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n + 4 \cos n}{3 + 5n^3}$.

Il termine generale della serie è infinitesimo. Infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n + 4 \cos n}{3 + 5n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n}{5n^3 + 3} + \frac{4}{3 + 5n^3} \cos n = 0 + 0 = 0$$

Il limite del secondo addendo è zero in quanto prodotto di una successione infinitesima $\frac{4}{3 + 5n^3}$ e di una successione definitivamente

limitata $\cos n$. Confrontiamo la serie data con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{5n + 4 \cos n}{3 + 5n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^3}{5n^3 + 3} + \frac{4n^2}{3 + 5n^3} \cos n = 1 + 0 = 1$$

Pertanto la serie data è convergente.

Esempio 2.8

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n}$. Essendo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

La serie data è maggiorata dalla serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$. Pertanto dalla convergenza della seconda segue la convergenza della serie data.

Esempio 2.9

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Si vede immediatamente che la serie è divergente, perchè?

2.1. Criterio della radice e criterio del rapporto. Introduciamo due criteri che ci permettono di desumere il carattere di una

serie data a termini non negativi o positivi per confronto con la serie geometrica.

TEOREMA 2.4 (Criterio della radice sotto forma di limite). *Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ segue che la serie data è convergente per $l < 1$, la serie data è divergente per $l > 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente. Dall'ipotesi che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ segue per la definizione di convergenza che

$$\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) : \forall n > n(\epsilon) \Rightarrow l - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \epsilon$$

Essendo la precedente vera per qualunque ϵ , in corrispondenza di un valore di ϵ tale che $l + \epsilon < 1$ esiste $n(\epsilon)$ tale che per ogni $n > n(\epsilon)$ si ha $\sqrt[n]{a_n} < l + \epsilon < 1$ ossia definitivamente $a_n < (l + \epsilon)^n$, per cui la serie data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è maggiorata da una serie geometrica di ragione $0 < l + \epsilon < 1$. Pertanto dalla convergenza della seconda segue la convergenza della serie data. $\square$

Esempio 2.10

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

La condizione necessaria per la convergenza di una serie è verificata

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \frac{n}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \frac{n}{2n+1} = \\ &= e^{+\infty \ln \frac{1}{2}} = e^{+\infty(-\ln 2)} = e^{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

Applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Di conseguenza la serie data è convergente.

Esempio 2.11

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{ne^n}$.

Applichiamo il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{ne^n}} = \frac{1}{e} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \frac{1}{e}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La serie è convergente.

Esempio 2.12

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n + 1}{2^n - 1}$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{5^n + 1}{2^n - 1}} \geq \sqrt[n]{\frac{5^n}{2^n}} > \frac{5}{2} > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La serie data è divergente.

Esempio 2.13

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{\ln n}$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^{\ln n}} \geq 2^{\frac{\ln n}{n}} \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La serie data è divergente. D'altronde si vede chiaramente che il termine generale della serie non è infinitesimo.

Esempio 2.14

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + \sin \frac{1}{n})^n}{(2x)^n}$, $x > 0$.

Applichiamo il criterio della radice nella forma di limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(1 + \sin \frac{1}{n})^n}{(2x)^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin \frac{1}{n}}{2x} = \frac{1}{2x}$$

Di conseguenza, imponendo la condizione di convergenza $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ si ha

$$\frac{1}{2x} < 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

ossia per $x > \frac{1}{2}$ la serie data è convergente. Per $x < \frac{1}{2}$ la serie è divergente. Per $x = \frac{1}{2}$ segue che

$$\sqrt[n]{a_n} = 1 + \sin \frac{1}{n} > 1$$

Applicando il criterio della radice, ci rendiamo conto che la successione che genera la serie non è infinitesima. Essendo una serie a termini positivi non convergente, possiamo affermare che per $x = \frac{1}{2}$ la serie diverge.

TEOREMA 2.5 (Criterio del rapporto sotto forma di limite). *Sia*
 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini positivi.*

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ *allora la serie è convergente.*

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ *allora la serie è divergente.*

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ *nulla si può dire sul carattere della serie.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è simile a quella condotta nel caso del criterio della radice in forma di limite. $\square$

Esempio 2.15

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)} 2^n n!} \frac{n^n}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} =$$

$$2 \frac{n^n}{(n+1)^n (n+1)} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{e} < 1$$

La serie è convergente.

Esempio 2.16

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a-1)^n}{n^2+1}$, $a > 1$.

Applichiamo il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(a-1)^{(n+1)}}{(n+1)^2+1} \frac{n^2+1}{(a-1)^n} = \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} (a-1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (a-1)$$

La serie converge per $a - 1 < 1$ ossia per $1 < a < 2$, la serie diverge per $a - 1 > 1$ ossia per $a > 2$. Per $a = 2$ il criterio utilizzato non da indicazioni. Ricorriamo allora al criterio del confronto.

Per $a = 2$ la serie diviene $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ maggiorata dalla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Pertanto per $a = 2$ la serie converge.

2.2. Esercizi di riepilogo. Di seguito vengono proposti alcuni esercizi svolti.

Esercizio 2.1

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) \sin \frac{1}{n}$. Il termine generale della serie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 0 \cdot \ln 2 \cdot 1 = 0$$

è infinitesimo. Ma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \ln 2$$

la serie data ha lo stesso carattere della $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ che è convergente.

Esercizio 2.2

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\ln n}}$, con $x > 0$.

$$x^{\ln n} = e^{\ln n \cdot \ln x} = (e^{\ln n})^{\ln x} = n^{\ln x}$$

La serie data è convergente per $\ln x > 1$ ossia per $x > e$, è divergente per $\ln x \leq 1$ ossia per $0 < x \leq e$.

Esercizio 2.3

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$.

$$\frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{4^n n!} = 4 \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = 4 \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{e} > 1$$

La serie data è divergente per il criterio del rapporto.

Esercizio 2.4

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$.

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} &= \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)2(n+1)} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

La serie data è convergente per il criterio del rapporto.

3. Serie con infiniti termini negativi e serie assolutamente convergenti

3.1. Serie a segni alterni e criterio di Leibniz. Le serie del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ prendono il nome di *serie a segni alterni*.

TEOREMA 3.1 (Criterio di Leibniz). *Sia (a_n) una successione a termini non negativi, non crescente. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ è convergente.}$$

Esempio 3.1

Studiare la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{n} - 1)$.

È un serie a segni alterni. Per stabilire che è convergente dobbiamo verificare se sono vere le ipotesi del criterio di Leibniz.

- (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0$
- (2) (a_n) è non crescente?

$$\sqrt[n]{n} - 1 \geq \sqrt[n+1]{n+1} - 1$$

se e solo se

$$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1}$$

eleviamo primo e secondo membro ad $n(n+1)$

$$n^{n+1} \geq (n+1)^n \Rightarrow n^n \cdot n \geq (n+1)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

¹Infatti per le proprietà del fattoriale si ha

$$(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+1)!(2n+2) = (2n)!(2n+1)(2n+2)$$

Tenuto conto che

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < 3$$

la precedente relazione è verificata $\forall n \geq 3$.
Pertanto la serie è convergente.

Non ci occuperemo di serie a segni alternati ulteriormente, poiché il nostro obiettivo è analizzare serie funzioni e, in particolare, serie di potenze. Da questo punto di vista, le **serie assolutamente convergenti** risultano molto più importanti di quelle a segni alternati.

3.2. Serie assolutamente convergenti. Spesso si incontrano serie che presentano infiniti termini positivi ed infiniti termini negativi ma che non presentano la struttura ordinata delle serie a segni alterni. Per stabilire la convergenza di tali serie introduciamo il concetto di *assoluta convergenza*.

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini di segno qualsiasi, consideriamo la serie

$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, ossia la serie avente per elementi i valori assoluti degli elementi della serie data. Vale il seguente teorema:

TEOREMA 3.2. *Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è convergente $\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.*

Attenzione: il teorema esprime una condizione sufficiente, ossia l'essere la $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente non implica che necessariamente la serie

$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ sia convergente.

Esempio 3.2

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, ossia la *serie armonica a segni alterni*, sappiamo che tale serie è convergente.

Se consideriamo la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right|$ otteniamo

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che sappiamo essere divergente.

Introduciamo la seguente **definizione**.

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **assolutamente convergente** se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ dei valori assoluti dei suoi termini.

Evidentemente, per quanto detto, una serie assolutamente convergente è convergente.

Ogni serie a termini di segno costante convergente è assolutamente convergente. Si lascia come esercizio di dimostrare che:

3.3. Criteri di convergenza assoluta. Lo studio della convergenza assoluta di una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si riduce allo studio della convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, che è una serie a termini positivi, cui, quindi, si applicano tutti i teoremi studiati per le serie a termini positivi.

In particolare, nel teorema del rapporto dovremo calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

mentre, nel criterio della radice, dovremo considerare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Chiaramente, potremo anche applicare il criterio del confronto, confrontando $|a_n|$ con una qualche serie a termini **positivi** b_n .

Esempio 3.3

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n |x|^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) |x| = |x|$$

Ne segue che la serie data è assolutamente convergente per $|x| < 1$.

Nel caso sia $x = 1$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \right)^{\frac{n}{\sqrt{n}}} = +\infty$$

Ne segue che la serie non converge per $|x| \geq 1$

Esempio 3.4

Studiare la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n2^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Vediamo per quali valori di x la serie è assolutamente convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n2^n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Applichiamo il criterio della radice nella forma di limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{2 \sqrt[n]{n}} = \frac{|x|}{2}$$

Imponiamo la condizione di convergenza $\frac{|x|}{2} < 1$ ossia $|x| < 2$.

Pertanto per $-2 < x < 2$ la serie dei valori assoluti è convergente, per cui per tali valori la serie data è assolutamente convergente e quindi converge.

Per $x = 2$ la serie data diviene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

che sappiamo essere convergente.

Per $x = -2$ la serie data diviene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} (-1)^n \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge negativamente.