Università degli Studi di Palermo

Facoltà di Economia

CdS Statistica per l'Analisi dei Dati

Appunti del corso di Matematica

17 - Serie di funzioni

Anno Accademico 2013/2014

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Consiglio, S. Piraino

1. Introduzione

Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Come per le successioni, se fissiamo $x = x_0$, si otterà una semplice serie numerica di cui si può studiare la convergenza (ed eventualmente calcolare la somma) con le tecniche che abbiamo imparato. Consideriamo ad esempio la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n,$$

nel caso in cui $x = -\frac{1}{3}$. Si otterrà:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n},$$

Usando il criterio della radice possiamo dire che questa serie è assolutamente convergente. Infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)\frac{1}{3}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Per gli obiettivi del nostro corso studieremo solo una particolare classe di serie di funzioni, le cosiddette **serie di potenze**, ossia serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-c)^n,$$

cui appartiene la serie considerata nel nostro esempio iniziale (basta porre $a_n = 1$ e $c = 0$).

2. Serie di Potenze

Affinché una serie serie di funzioni sia definita serie di potenze l'esponente della variabile x deve essere un intero non negativo. Ad esempio $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{x})^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{\frac{n}{2}}$ **NON** è una serie di potenze.
La forma più generale di una serie di potenze è (come accennato in precedenza)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(x-c)^n.$$

Come per le serie numeriche, è importante studiare la convergenza delle serie di potenze. I criteri del rapporto e della radice forniscono le condizioni affinché una serie converga. In particolare si è interessati all'assoluta convergenza di queste serie. Consideriamo una generica serie di potenze ed applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n\,(x-c)^n|^{\frac{1}{n}} = |x-c| \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Se

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = L \neq 0,$$

allora la serie di potenze convergerà $\forall x \in \mathbb{R}$ tale che

$$|x - c| < \frac{1}{L}.$$

Si osservi che, se

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = +\infty,$$

allora la serie convergerà solo per $x = c$. D'altro canto, se $L = 0$ allora

$$|x - c|\, L < 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

ossia la serie convergerà per ogni valore di x. Il valore $R = \frac{1}{L}$ con L finito è detto **raggio di convergenza della serie**. Se $L = 0$ diremo che **il raggio di convergenza della serie è infinito**, mentre se $L = +\infty$ allora il raggio di convergenza sarà pari a zero: $R = 0$.

L'intervallo aperto $(c - R, c + R)$ è detto intervallo di convergenza. Si osservi che, in alcuni casi, gli estremi dell'intervallo possono essere inclusi, $[c - R, c + R]$, però i punti estremi vanno studiati con altri metodi e non ce ne occuperemo.
Gli stessi risultati ottenuti con il criterio della radice si possono ottenere applicando il teorema del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}\,(x-c)^{n+1}}{a_n\,(x-c)^n} \right| = |x - c| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

In questo caso porremo $L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ e il raggio di convergenza sarà $R = \frac{1}{L}$.

Esempio 2.1
Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

In questo caso, $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ e $c = 0$.Applicando il criterio della radice, otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n \right|^{\frac{1}{n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{|x|}{3} < 1$$

Quindi, la serie converge per $|x| < 3$ e diverge per $|x| > 3$. Negli estremi, $x = \pm 3$, è necessario verificare il carattere della serie. Se $x = 3$ la serie diventa: $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$, ossia la serie diverge in

$x = 3$. In $x = -3$ la serie si riduce alla serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ che, come sappiamo, non converge. Quindi l'intervallo di convergenza della serie di potenze considerata sarà l'intervallo aperto $(-3, 3)$.

Esempio 2.2
Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Il linea di massima, se, come in questo caso, il termine generale a_n presenta un fattoriale (!), conviene utilizzare il criterio del rapporto, anziché quello della radice. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\cancel{n!}} \cancel{n!} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1.$$

Questo risultato ci assicura che $\forall x \in \mathbb{R}$ la serie converge, ossia che il raggio di convergenza è infinito: $R = \infty$ e quindi l'intervallo di convergenza coinciderà con $\mathbb{R}$: $(-\infty, +\infty)$.

Esempio 2.3
Determinare l'intervallo di convergenza per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n.$$

Applicando il metodo della radice, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x-2|^n} = |x-2| < 1.$$

Ricordando la definizione data di raggio di convergenza ($|x-c| < \frac{1}{L} = R$), concludiamo che, nel nostro caso, $R = \frac{1}{1} = 1$. L'intervallo di convergenza si ottiene immediatamente dalla condizione $|x-2| < 1$:

$$|x-2| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x-2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 3.$$

Restano da studiare gli estremi di questo intervallo. Se $x = 3$ la serie diverge, in quanto, come abbiamo già visto, $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$. Inoltre, per $x = -1$ otteniamo $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ che non converge. Quindi l'intervallo di convergenza della serie è l'intervallo aperto $(1, 3)$.

Esempio 2.4
Determinare l'intervallo di convergenza della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+1}\,(2\,x+5)^n\,.$$

Si nota che il termine tra parentesi che contiene la x non è nella forma canonica $(x-c)$. Prima di procedere conviene dunque ricondurci ad una tale forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+1}\,(2\,x+5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+1} 2^n \left(x+\frac{5}{2}\right)^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+1} 2^n \left[x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right]^n .$$

L'ultima espressione è una serie di potenze in forma canonica, con $a_n = \dfrac{(-1)^n}{5\,n+1}2^n$ e $c=-\frac{5}{2}$. Applichiamo ora il criterio del rapporto per stabilire il raggio di convergenza:

$$|x-c| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{5\,(n+1)+1}2^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{5\,n+1}2^n}\right| = \\ = \left|x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)}{5\,n+6}2}{\frac{1}{5\,n+1}}\right| = \\ = \left|x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right| \; 2 \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5\,n+1}{5\,n+6}\right| = \\ = \left|x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right| \; 2\cdot 1 = \left|x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right| \; 2 < 1,$$

da cui:

$$\left|x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right| < \frac{1}{2}.$$

Quindi il raggio di convergenza è $R=\frac{1}{2}$ e l'intervallo di convergenza si ottiene dalla disequazione precedente:

$$\left|x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right| < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x-\left(-\frac{5}{2}\right) < \frac{1}{2},$$

da cui, immediatamente segue che:

$$-\frac{1}{2}-\frac{5}{2} = -3 < x < \frac{1}{2}-\frac{5}{2} = -2.$$

Cosa succede negli estremi, -2 e -3? In $x=-2$ la serie si scrive:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+1}\,(-4+5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+1},$$

che è una serie a segni alternati, convergente, secondo il criterio di Leibniz. In $x = -3$ invece si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5\,n+1}\,(-6+5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{5\,n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5\,n+1},$$

che è una serie divergente per il criterio del confronto con la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Quindi l'intervallo di convergenza della serie è $I = (-3, -2]$.

3. Rappresentazione di una funzione tramite serie di potenze

Come visto, una successione di funzioni può convergere ad una funzione. Le serie di funzioni possono essere viste come successioni di somme parziali di funzioni. Dunque anche le serie di funzioni sono, in definitiva, successioni di funzioni e possono dunque convergere a funzioni. In particolare, per gli scopi del nostro corso, ci interesseremo alle funzioni cui convergono le serie di potenze. Più specificamente, vedremo come **rappresentare** una funzione (in un certo intervallo) attraverso una serie di potenze. Abbiamo già visto che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Invertendo il processo logico che porta da una serie alla sua somma abbiamo che la funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ può essere rappresentata come

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall \in x(-1, 1).$$

Si noti che il dominio della funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ è più ampio dell'intervallo aperto $(-1, 1)$ dove la funzione può essere rappresentata attraverso la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. In altri termini, nell'intervallo di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $(-1, 1)$, è possibile **approssimare** la funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ tramite una somma parziale (ossia sommando fino ad un certo n finito) della serie. Più grande è n, migliore sarà l'approssimazione della funzione. Nella figura 1 (a pagina seguente) è mostrata l'approssimazione di $f(x) = \frac{1}{1-x}$, in un intorno di $x = 0$, (ossia tramite somme parziali della serie sopraindicata), per diversi valori di n: $n = 1, 4, 8, 12$. Come si può notare, per $n = 4$ l'approssimazione è buona nell'intervallo $(-0.5, 0.5)$, mentre, per $n = 12$, la successione delle somme parziali $\sum_{n=0}^{12} x^n$ coincide quasi perfettamente con la funzione in $(-0.5, 1)$.

A questo punto possiamo formulare alcune domande:

a) La funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ è approssimabile nell'intervallo aperto $(-1, 1)$. E' possibile approssimare $f(x)$ in altri punti del suo

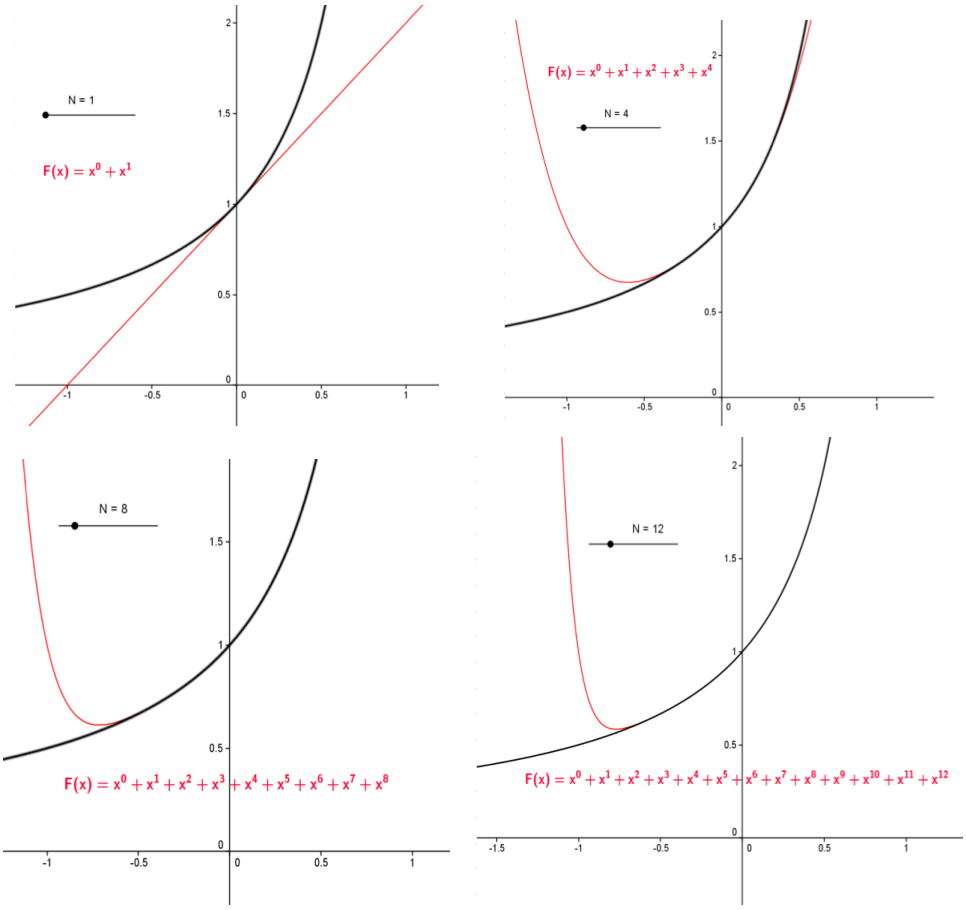

FIGURA 1. Approssimazione di $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in un intorno di $x = 0$ per diversi valori di n: $n = 1, 4, 8, 12$.

dominio? Quale sarà, eventualmente, la sua rappresentazione tramite serie? E' la stessa serie che abbiamo visto, o una diversa?

b) E' possibile rappresentare funzioni diverse da $f(x) = \frac{1}{1-x}$ tramite sviluppo in serie di potenze?

c) Perché è utile rappresentare una funzione attraverso una serie di potenze?

Riguardo il punto **a)**, per esempio, potremmo essere interessati allo sviluppo in serie di potenze di $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in un intorno di 2, ovvero attraverso una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$. In analogia con quanto visto nell'intorno di 0, si potrebbe pensare di porre $a_n = 1$ nella precedente serie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$. Tuttavia, posto $y = x-2$, sappiamo che questa serie converge a $\frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}$, che è diversa dalla nostra funzione. Quello che cerchiamo è una serie di potenze centrata in $x = 2$, ossia del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$ ma la cui somma sia sempre $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Il modo per rispondere alla nostra domanda si trova ragionando, non

a partire dalla serie, ma a partire dalla funzione stessa:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{-1}{x-1} = \frac{-1}{1-(2-x)}.$$

Se poniamo $2-x = y$ nell'ultima espressione, sappiamo che la funzione $\frac{-1}{1-y}$ può essere sviluppata nell'intorno di $y = 0$ (e quindi di $x = 2$ visto che $2 - x = y$) come:

$$\frac{-1}{1-y} = -\sum_{n=0}^{\infty} y^n.$$

Quindi, ricordando che $y = 1 - x$ abbiamo:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{-1}{1-(2-x)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(2-x)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$$

Lo studente mostri che l'intervallo di convergenza di questa serie è $(1, 3)$. In figura 2 sono mostrate le approssimazioni tramite serie di potenze (con $n = 8$) della funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ nell'intorno di $x = 0$ e $x = 2$.

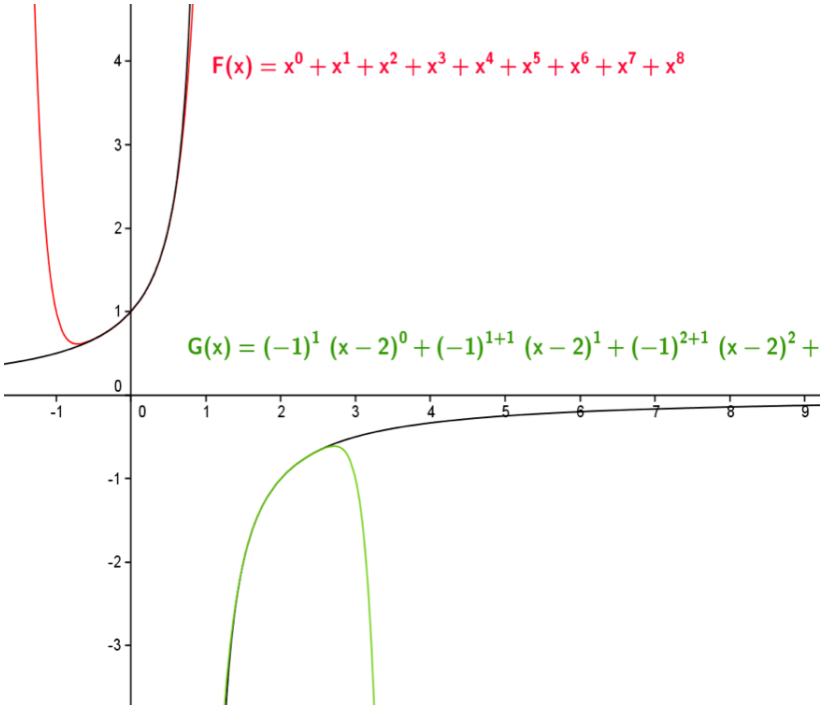

FIGURA 2. Approssimazione di $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in un intorno di $x = 0$ (in rosso) e in un intorno di $x = 2$ (in verde) con $n = 8$.

Riguardo il punto **b)**, non tutte le funzioni possono essere rappresentate tramite una serie di potenze. In particolare tutte le funzioni che ammettono sviluppo in serie di potenze in un certo intervallo I si dicono **analitiche nell'intervallo** I. Per quanto riguarda il nostro corso, ci interesseremo solo di funzioni analitiche. Inoltre vedremo un teorema che consente di scrivere lo sviluppo in serie di una qualsiasi funzione nell'intorno di qualsiasi punto in cui essa sia analitica.

Riguardo il punto **c)**, in calcolo delle probabilità, le serie di potenze sono utilizzate, per esempio, per determinare i momenti di alcune distribuzioni di probabilità discrete. Fra le svariate applicazioni, vedremo come le serie possono essere utilizzate per il calcolo di integrali di funzioni la cui antiderivata non è esprimibile attraverso una combinazione finita di funzioni elementari. A questo scopo sono utili il seguenti teoremi sull'integrazione e la derivazione delle serie di potenze.

TEOREMA 3.1. *Sia* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-c)^n$ *una serie di potenze con raggio di convergenza* $R > 0$. *Sia inoltre* $I = (c-R, c+R)$ *l'intervallo di convergenza della serie alla funzione* $f : I \to \mathbb{R}$*:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-c)^n.$$

Allora:

a) *la funzione* $f(x)$ *è derivabile infinite volte su* I *e*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,n\,(x-c)^{n-1},$$

con $f' : I \to \mathbb{R}$ *e raggio di convergenza* R*;*

b) *l'integrale indefinito di* $f(x)$ *è dato da*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\,(x-c)^{n+1} + \ \textit{costante},$$

con $F : I \to \mathbb{R}$ *e raggio di convergenza* R*.*

Esempio 3.1
Si determini lo sviluppo in serie della funzione

$$f(x) = \ln(x+1).$$

Si osservi che:

$$\frac{d}{dx}\ln(x+1) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}.$$

Di questa funzione conosciamo lo sviluppo in serie di potenze. Quindi:

$$\frac{d}{dx}\ln(x+1) = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, x^n,$$

con intervallo di convergenza $(-1,1)$. Inoltre, si osservi che, per costruzione, $\ln(x+1)$ è un'antiderivata di $\frac{1}{x+1}$. Quindi, applicando il punto **b)** del teorema appena enunciato si ottiene:

$$\ln(x+1) = \int \frac{1}{x+1}dx = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, x^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int x^n dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

che la serie cercata e il cui raggio di convergenza è sempre $(-1,1)$.

Purtroppo non è sempre possibile operare come in questo esempio. Il seguente teorema fornisce invece un metodo generale per determinare la rappresentazione di una funzione attraverso serie di potenze.

Teorema 3.2 (Serie di Taylor). *Sia $f : I \to R$ una funzione la cui rappresentazione in serie di potenze è $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-c)^n$, con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-c)^n$ convergente su un intervallo aperto I centrato in c. Allora*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad n = 0,1,2,... \quad e \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,(x-c)^n,$$

dove $f^{(n)}(c)$ è la derivata $n-$esima di f calcolata nel punto c.

Dimostrazione.Dall'espressione della serie si ha:

$$f(x) = a_0 + a_1\,(x-c) + a_2\,(x-c)^2 + a_3\,(x-c)^3 + ...$$

Questo sviluppo deve valere $\forall x \in I$, e, quindi varrà anche in $x = c$. Se poniamo $x = c$ nella precedente equazione, otteniamo:

$$f(c) = a_0,$$

poiché tutti gli altri termini dell'espansione si annullano in $x = c$. Tenuto conto che $f^{(0)}(c) = f(c)$ e che $0! = 1$, abbiamo provato la relazione indicata nel teorema per $n = 0$: $a_0 = f(c)$. Derivando ambo i membri dell'espansione di $f(x)$ otteniamo:

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,(x-c) + 3\,a_3\,(x-c)^2 + ...$$

Calcolando quindi la derivata prima di f in c, risulta

$$f'(c) = a_1,$$

poiché, anche in questo caso, tutti gli altri termini dell'espansione si annullano in $x = c$. Quindi, poiché $1! = 1$ abbiamo dimostrato che la relazione data per i coefficienti dell'espansione nel teorema vale per $n = 1$: $a_1 = \frac{f'(c)}{1!} = f'(c)$. Derivando l'espansione di $f'(x)$ ottenuta sopra, si ricava l'espansione di $f''(x)$:

$$f''(x) = 2\,a_2 + 3 \cdot 2\,a_3\,(x-c) + 4 \cdot 3\,a_4(x-c)^2 + ...$$

Quindi

$$f''(c) = 2\,a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(c)}{2} = \frac{f''(c)}{2 \cdot 1} = \frac{f''(c)}{2!}$$

e la relazione è provata anche per $n = 2$. Se deriviamo n volte l'espansione di $f(x)$, le prime $n-1$ potenze dello sviluppo saranno scomparse. Avremo:

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1\,a_n + (n+1) \cdot n \cdots 2 \cdot 1\,a_{n+1}(x-c) + ...$$

Quindi:

$$f^{(n)}(c) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1\,a_n = n!\,a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!},$$

che è quanto volevasi dimostrare. Lo studente dimostri il teorema per induzione matematica. □

Esempio 3.2
Determinare lo sviluppo in serie della funzione $f(x) = e^x$ nell'intorno di $x = -1$. Dalle proprietà della funzione esponenziale sappiamo che $f^{(n)}(x) = f(x) = e^x$. Quindi $f^{(n)}(-1) = f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Quindi, per il teorema di Taylor, avremo:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{e}}{n!}(x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-1}\frac{(x+1)^n}{n!}.$$

Calcoliamo, con il metodo del rapporto, il raggio di convergenza di questa serie:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{-1}\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{e^{-1}\frac{(x+1)^n}{n!}}\right| = |x+1| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = |x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = 0.$$

Quindi, il raggio di convergenza della serie di Taylor di e^x nell'intorno di $x = -1$ è infinito.

Gli sviluppi in serie di Taylor nell'intorno di $x = 0$ prendono il nome di **serie di Mc Laurin**. E' facile verificare che la serie di Mc Laurin

di e^x è

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Lo studente mostri che il raggio di convergenza di questa serie è ∞.

Esempio 3.3
Determinare lo sviluppo in serie di Mc Laurin delle funzioni $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$. Iniziamo con $f(x) = \sin(x)$. Abbiamo $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x) = f(x)$. Questo garantisce che $f^{(5)}(x) = f'(x)$, $f^{(6)}(x) = f''(x)$, e così via. In $x = 0$ avremo quindi:

$f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 0$; $f'''(0) = -1$; $f^{(4)}(0) = f(0) = 0$

e, in generale,

$$f^{(2\,n+1)}(0) = (-1)^n; \quad f^{(2\,n)}(0) = 0.$$

La serie di Taylor di $f(x)$ in un intorno di $x = 0$ (ovvero la serie di Mc Laurin) sarà:

$$\sin(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 - \frac{1}{7!}x^7 + ... = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}.$$

Lo studente dimostri che il raggio di convergenza di questa serie è $R = \infty$. A questo punto, calcolare la serie di Mc Laurin di $\cos(x)$ è semplice, poiché $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$. Abbiamo quindi:

$$\cos(x) = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{d}{dx}[x^{2\,n+1}]}{(2\,n+1)!} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\,n+1)x^{2\,n}}{(2\,n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!}.$$

Lo studente, tenuto conto dei teoremi precedenti, sapendo che $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ e che il raggio di convergenza della serie di Mc Laurin di $\sin(x)$ è $+\infty$, può dire immediatamente che il raggio di convergenza della serie appena costruita è $+\infty$ (senza calcolarlo)?

Esempio 3.4
Rappresentare tramite serie di potenze la funzione $f(x) = \ln(x)$ in

un intorno di $x = 1$. Calcoliamo le derivate di $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}; \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2}; \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}; \quad f^{(4)}(x) = \frac{-2 \cdot 3}{x^4};$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} \quad f^{(6)}(x) = \frac{-2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6}; \quad ...$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}.$$

L'ultima equazione deve essere provata per induzione matematica. L'abbiamo già provata per piccoli valori di $n \geq 1$. Supponiamola vera per n e mostriamo che è vera per $n + 1$:

$$f^{(n+1)(x)} = \frac{d}{dx} f^{(n)(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}\right] =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!\,(-1)\,n}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}},$$

che è quanto volevasi dimostrare. Possiamo quindi scrivere immediatamente il coefficiente a_n dell'espansione in serie di Taylor di $f(x)$ nell'intorno di $x = 1$;

$$a_n = \frac{f^{(n)(1)}}{n!} = \frac{\frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{1^n}}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Ricordando che $a_0 = f(1) = \ln(1) = 0$, lo sviluppo in serie si scrive:

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,(x-1)^n.$$

Lo studente dimostri che la rappresentazione in serie di potenze di $\ln(x)$ appena ottenuta converge nell'intervallo aperto $(0, 2)$.

Esempio 3.5
Determinare il valore del seguente limite, utilizzando l'espansione in serie delle funzioni coinvolte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - e^{-x^2}}{x^2}.$$

Conosciamo già l'espansione di $\cos(x)$ in un intorno di $x = 0$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!}.$$

Per quanto riguarda e^{-x^2}, basta porre $u = -x^2$ e ricordare lo sviluppo in serie di e^u in un intorno di $u = 0$ (corrispondente a

$x = 0$):

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{n!}.$$

Sostituendo nel limite, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{n!}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2\,n-2}}{(2\,n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n-2}}{n!} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2\,n-2} \left[\frac{1}{(2\,n)!} - \frac{1}{n!}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} 1\, \frac{1}{x^2}\,[0] + (-1)\, x^0 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right] + (1)\, x^2 \left[\frac{1}{4!} - \frac{1}{2}\right] + ... =$$

$$\lim_{x\to 0} (-1) \left[-\frac{1}{2}\right] + x^2 \left[\frac{1}{4!} - \frac{1}{2}\right] + ... = (-1) \left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

ATTENZIONE: il teorema che definisce la serie di Taylor centrata in c è un teorema di unicità: se la funzione $f(x)$ ammette sviluppo in serie di potenze in un intorno $I(c)$ allora questa serie di potenze è:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Ciò NON significa che $T(x)$ rappresenti la funzione $f(x)$ in altri punti del suo dominio al di fuori di $I(x)$ e, tantomeno, ciò NON implica che in generale $T(x) = f(x)$.

Per gli obiettivi del nostro corso, non sono necessari ulteriori approfondimenti su questo aspetto. Andremo invece ad analizzare come la somma parziale di una serie di Taylor può essere usata per approssimare una funzione nell'intorno di un dato punto.

Definizione di Polinomio di Taylor
Sia $f(x)$ una funzione derivabile N volte su un intervallo I e tale che $c \in I$. Il polinomio

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

si dice **polinomio di Taylor di ordine** N **centrato in** c della funzione $f(x)$.

Il polinomio di Taylor non è altro che un'approssimazione della funzione $f(x)$ in un intorno del punto c tramite un polinomio di grado $N-$esimo. Si osservi che l'approssimazione di Taylor tramite un polinomio di primo grado, $T_1(x) = f(c) + f'(c)\,(x-c)$, non è altro che la retta tangente alla funzione $f(x)$ nel punto c. Risulterà intuitivo il fatto che all'aumentare dell'ordine del polinomio, si ridurrà l'errore di approssimazione. E' possibile stimare tale errore? Il seguente teorema risponde a questa domanda.

TEOREMA 3.3 (di Taylor). *Sia $f(x)$ una funzione derivabile $N+1$ volte nell'intervallo aperto I centrato in c. Sia $x \in I$ e*

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

il polinomio di Taylor di ordine N centrato in c. Allora $\exists s$ compreso tra x e c tale che

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(s)}{(N+1)!}(x-c)^{N+1},$$

dove $R_N(x)$ è il cosiddetto **resto nella forma di Lagrange** *tra $f(x)$ e l'approssimazione $T_N(x)$:*

$$f(x) - T_N(x) = R_N(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = T_N(x) + R_N(x).$$

Il teorema di Taylor ci dice, essenzialmente che se si approssima una funzione attraverso un polinomio di Taylor di ordine N l'errore che si commette è un infinitesimo di ordine superiore ad $(x-c)^N$:

$$\lim_{x\to c} \frac{R_N(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x\to c} \frac{\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}{(x-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} \lim_{x\to c}(x-c) = 0.$$

Il polinomio $T_N(x)$ rappresenta la migliore approssimazione attraverso un polinomio di grado N della funzione $f(x)$ nell'intorno di c. Si noti che tutte le derivate, fino all'$N-$esima, di $T_N(x)$ in c coincidono con quelle della $f(x)$:

$$T'(c) = f'(c);\;\; T''(c) = f''(c);\;\; T'''(c) = f'''(c);\quad \ldots\;\; T^{(N)}(c) = f^{(N)}(c).$$

La dimostrazione di quest'ultima affermazione è simile a quella vista per ottenere la serie di Taylor di $f(x)$ e viene lasciata per esercizio. Si osservi, infine, che il resto $R_N(x)$ non è altro che l'$N+1-$esimo termine dell'espansione di Taylor di $f(x)$ valutato NON in c, ma in $s \in I$.

3.1. Polinomio di Taylor e Teorema del valor medio. Nel caso in cui si approssimasse la funzione $f(x)$ con il polinomio di ordine zero, $T_0(x) = f(c)$ avremmo:

$$f(x) = T_0(x) + R_0(x) = f(c) + f'(s)\,(x-c),$$

con $s \in (c, x)$. Da cui:

$$f(x) - f(c) = f'(s)\,(x - c) \quad \Leftrightarrow \quad f'(s) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Questo risultato esprime il teorema del valore medio, che abbiamo già visto. Dunque, il teorema di Taylor può essere visto come una generalizzazione del teorema del valor medio.

In Figura 3 sono raffigurati i polinomi di Taylor di $f(x) = \ln(x)$ centrati in $c = 1$, di ordine 1,2 e 3, rispettivamente. Si osservi come l'errore di approssimazione è maggiore per x che si allontana da $c = 1$. Tale errore è, comunque, più piccolo al crescere dell'ordine di approssimazione.

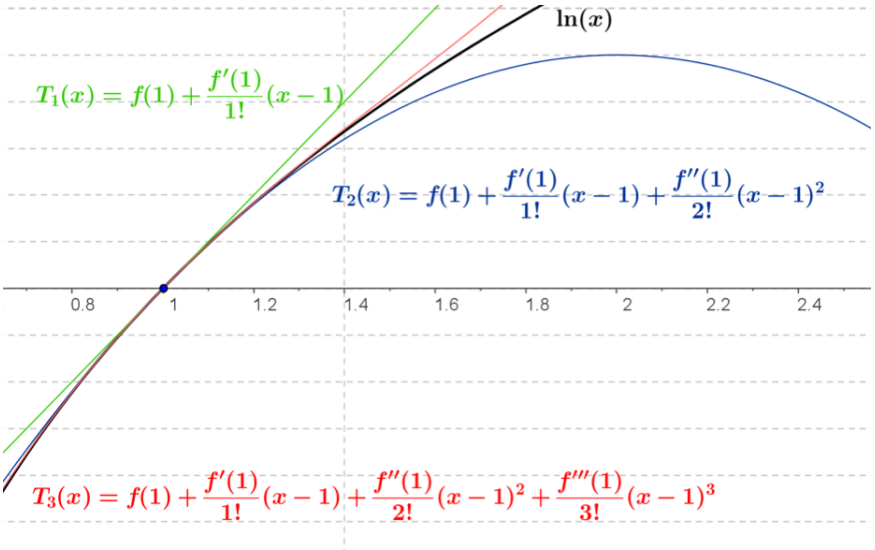

FIGURA 3. Approssimazione di $f(x) = \ln(x)$ in un intorno di $c = 1$ (in blu) attraverso il polinomi di Taylor $T_1(x)$, $T_2(x)$ e $T_3(x)$.

3.2. Relazione tra il polinomio di Taylor e la ricerca di massimi e minimi di una funzione. Vediamo come è possibile utilizzare l'approssimazione attraverso il polinomio di Taylor di una funzione come test per individuare i punti di massimo e minimo locale della funzione. Si ipotizzi che la funzione $f(x)$ sia derivabile tre volte nell'intorno di un punto c, ossia che esista $f'''(x)$ con $x \in I(c)$. Per il teorema di Taylor potremo scrivere:

$$f(x) = f(c) + f'(c)\,(x - c) + \frac{1}{2} f''(c)(x - c)^2 + R_2(x)$$

Abbiamo visto che il termine $R_2(x)$, per $x \to c$ è un infinitesimo di ordine superiore a $(x-c)^2$. Possiamo quindi approssimare, per x sufficientemente vicino a c, $f(x)$ con $T_2(x)$:

$$f(x) \cong f(c) + f'(c)\,(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2.$$

Si osservi che se c è un punto critico di f allora $f'(c) = 0$. Infatti il caso in cui $f'(c)$ non esista è escluso dall'ipotesi che $f(x)$ sia derivabile tre volte in $I(c)$. Dunque se c è un punto critico l'approssimazione precedente diventa.

$$f(x) \cong f(c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - f(c) \cong \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2.$$

Essendo $(x-c)^2 > 0$ il segno di $f(x) - f(c)$ nell'intorno $I(c)$ dipende solamente dal segno di $f''(c)$. Quindi, se $f''(c) > 0$ allora $f(x) - f(c) > 0\ \forall x \in I(c)$ e, pertanto, c è un punto di minimo locale di f. Viceversa, se $f''(c) < 0$ allora $f(x) - f(c) < 0\ \forall x \in I(c)$ e, pertanto, c è un punto di massimo locale di f. Cosa succede se $f''(c) = 0$? In questo caso l'approssimazione a secondo ordine di f non consente di rispondere alla domanda. Si deve considerare la sua approssimazione a terzo ordine:

$$f(x) \cong f(c) + f'(c)\,(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \frac{1}{3!}f'''(c)(x-c)^3.$$

Siamo interessati al caso in cui $f'(c) = f''(c) = 0$. Quindi:

$$f(x) \cong f(c) + \frac{1}{3!}f'''(c)(x-c)^3 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - f(c) \cong \frac{1}{3!}f'''(c)(x-c)^3.$$

In questo caso il segno di $f(x) - f(c)$ dipenderà sia dal segno di $f'''(c)$ che da quello di $(x-c)^3$. Quindi, se $f'''(c) \neq 0$, il punto c non è né di massimo, né di minimo.

Se $f(x)$ è derivabile N volte possiamo iterare il ragionamento precedente ed enunciare il seguente teorema:

Teorema 3.4. *Sia $f(x)$ una funzione derivabile N volte in un intorno, $I(c)$, del punto c. Si ipotizzi inoltre che $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(N-1)}(c) = 0$ e che $f^{(N)}(c) \neq 0$. Allora:*

(i) *Se N è* **pari e $f^{(N)}(c) > 0$, allora c è un punto di minimo locale.**

(ii) *Se N è* **pari e $f^{(N)}(c) < 0$, allora c è un punto di massimo locale.**

(iii) *Se N è dispari allora c non è né un punto di minimo né un punto di massimo locale.*

1.7 Serie di potenze - Esercizi proposti

Esercizio 1.7.1

Determinare il raggio di convergenza e l' insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$; $[R = 1$, converge negli estremi$]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)^4 x^n}{n!}$ $[R = \infty]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-1)^n$ $[R = 1$, non converge negli estremi$]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{3^n + 7^n} x^n$ $[R = 7/5$, non converge negli estremi$]$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{6^n + 2} x^n$ $[R = 0]$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{2^n + 1}$ $[R = 2$, non converge negli estremi$]$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}$ $[R = 1$, non converge negli estremi$]$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^{3n}}{2n(2n+2)}$ $[R = 5^{-1/3}$, converge negli estremi $]$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n x^{2n+1}}{n(n+1)}$ $[R = 3^{-1/2}$, converge negli estremi $]$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \frac{1 + n 2^n}{1 + n^2 2^n}$ $[R = 1$, converge negli estremi $]$.

FIGURA 4. Esercizi su raggio di convergenza ed intervallo di convergenza di serie di potenze.

Esercizio 1.7.6

Sviluppare in serie di Taylor, con centro nei punti indicati seguenti funzioni, indicando l'insieme I di convergenza degli sviluppi ottenuti.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = 2$; $\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}, \quad I = (0,4)\right]$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = -3$; $\left[-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^{n+1}}, \quad I = (-6,0)\right]$
3. $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$; $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (x-1)^n, \quad I = (0,2)\right]$
4. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x}}{4-x}$ $x_0 = 1$. $\left[-\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2} + \frac{1}{3^n} \right) \frac{(x-1)^n}{n}, \quad I = (0,2]\right]$

FIGURA 5. Esercizi su sviluppo di funzioni in serie di Taylor.

Esercizio 1.7.5

Sviluppare le seguenti funzioni in serie di McLaurin, indicando il raggio di convergenza degli sviluppi ottenuti.

1. $f(x) = \sin(x^2)$; $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!},\ R = \infty\right]$
2. $f(x) = \ln(1+x^4)$; $\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n}}{n},\ R = 1\right]$
3. $f(x) = \arctan(5x)$; $\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1},\ R = 1/5\right]$
4. $f(x) = \frac{2}{3-5x}$; $\left[2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{3^{n+1}},\ R = 3/5\right]$
5. $f(x) = \ln(2+x^2)$; $\left[\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n 2^n},\ R = \sqrt{2}\right]$
6. $\frac{x}{x^2 - x - 2}$ $\left[1/3 \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n - 2^{-n}) x^n,\ R = 1\right]$
7. $\frac{3-2x}{(1-x)^2}$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+3) x^n,\ R = 1\right]$
8. $\log(x^2 + 5x + 6)$ $\left[\log 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}\right) x^n,\ R = 2\right]$

FIGURA 6. Esercizi su sviluppo di funzioni in serie di Mc Laurin.