Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

18 - Matrici

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Consiglio

1. Definizione di matrice

Siano m, $n \in \mathbb{N}$. La tabella A composta da $m \times n$ numeri reali è detta *matrice* $m \times n$ *in* $\mathbb{R}$, e si rappresenta come segue:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Utilizzeremo le lettere maiuscole dell'alfabeto latino per indicare una matrice: A, B, C, ... I numeri reali a_{ij}, con $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$, sono detti *elementi della matrice* A, i e j sono detti *indice di riga* e *indice di colonna*, in quanto i identifica la riga della matrice dove trovare l'elemento a_{ij} e j ne identifica la colonna. Ad esempio con a_{13} si indica l'elemento posto all'incrocio tra la prima riga e la terza colonna di una matrice.

Una matrice può essere indicata come segue:

$$[A]_{ij}, \ \forall i = \{1, ..., m\}, j = \{1, ..., n\} \text{ oppure } A_{m\times n}$$

Indicheremo con A_{i*} la i-esima riga di A,

$$A_{i*} = [a_{i1} \ \ a_{i2} \ \ \cdots \ \ a_{in}]$$

e con A_{*j} la j-esima colonna di A:

$$A_{*j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Esempio 1.1
Sia A una matrice 2×3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 3 & 1/3 & 4 \end{bmatrix}.$$

In questo esempio l'elemento a_{11} della matrice è $a_{11} = 1$ e l'elemento a_{23} è $a_{23} = 4$. Gli elementi della terza colonna sono:

$$A_{*3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

e quelli della prima riga sono:

$$A_{1*} = [1 \ \ -1/2 \ \ 2] \, .$$

Una matrice $A_{m\times n}$ con $m = n$ si dice *quadrata di ordine* n. Sia $A_{n\times n}$ una matrice quadrata di ordine n. Gli elementi a_{11}, a_{22}, ... , a_{nn} sono detti *elementi diagonali* e costituiscono la *diagonale principale* di

$A_{n\times n}$. La somma degli elementi diagonali di una matrice si dice *traccia*: $Tr[A_{n\times n}] = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Una matrice quadrata A con tutti gli elementi fuori diagonale nulli, $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ si dice *matrice diagonale*.

Esempio 1.2
Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \ ; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sia A che B sono sono matrici quadrate di ordine 3. B è una matrice diagonale.

Siano A e B due matrici con lo stesso numero di righe e di colonne. Se $a_{ij} = b_{ij} \ \forall i, j$, allora le due matrici si dicono uguali e si scrive:

$$A = B.$$

Una matrice i cui elementi sono tutti nulli si dice *matrice nulla*. Sia $A_{m\times n}$ una matrice. Chiameremo *matrice trasposta di A* e la indicheremo con A^Tla matrice che si ottiene scambiando le righe e le colonne di A, quindi:

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}.$$

Una matrice A si dice *simmetrica* se $A = A^T$. Una matrice A di ordine $1 \times n$ è anche detta *matrice riga* di ordine n, mentre una matrice A di ordine $n \times 1$ è anche detta *matrice colonna* di ordine n.

Esempi 1.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ ; B = \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ ; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \pi & 1 & 2 \end{bmatrix} \ ; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \ ; F = \begin{bmatrix} \pi \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \ ; G = \begin{bmatrix} 1 & 6 & e \end{bmatrix} \ ; H = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

Come si può verificare, $A = B$; $C = A^T$; D è una matrice quadrata nulla di ordine 2; E è una matrice simmetrica ($E = E^T$); F è una matrice colonna; G è una matrice riga; H è una matrice diagonale (e quindi simmetrica) di ordine 3.

2. Operazioni fra Matrici

Siano A e B due matrici di ordine $m \times n$. Si definisce somma di A e B e si indica con $A+B$ la matrice ottenuta sommando ogni elemento di A con il corrispondente elemento di B:

$$[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} \ \ , \forall i, j.$$

E' evidente che affinché due matrici si possano sommare devono avere le stesse dimensioni. La somma tra matrici gode delle seguenti proprietà:

(1) $A + B = B + A$.
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$.
(3) $A + O = O + A = A$, dove O è la matrice nulla dello stesso ordine di A.
(4) $A + (-A) = (-A) + A = O$, dove $-A$ è la matrice opposta di A, ovvero la matrice ottenuta cambiando il segno di tutti gli elementi di A.

Dalle proprietà precedenti si può definire la differenza di A e B come la somma di A e della matrice opposta di B:

$$[A-B]_{ij} = [A]_{ij} + [-B]_{ij} \ \ , \forall i, j.$$

Inoltre, se $\alpha \in \mathbb{R}$ è uno scalare e A una matrice di ordine qualsiasi, si definisce il *prodotto scalare-matrice* come la matrice che si ottiene moltiplicando ogni elemento di A per lo scalare α:

$$[\alpha A]_{ij} = \alpha \ [A]_{ij} \ \ , \forall i, j.$$

Esempi 2.1
Determinare le seguenti somme tra matrici:

$$A + B \ ; \ A + B - 2C \ ; \ B - A \ ; \ 3\,A - C + 2\,B,$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ B = \left[(i+j)^2\right]_{i=1,2;\, j=1,2,3} \ ; \ C = \begin{bmatrix} a & -1 & 2 \\ 3 & b & 4 \end{bmatrix}.$$

Si ha:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 19 \\ 13 & 17 & 26 \end{bmatrix},$$

e

$$A + B - 2\,C = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 19 \\ 13 & 17 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a & -2 & 4 \\ 6 & 2b & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3-a) & 10 & 15 \\ 7 & 17 - 2b & 18 \end{bmatrix}.$$

Definiamo adesso il prodotto di due matrici A e B. E' necessario assumere che il numero di colonne di A sia uguale al numero di righe di B. Assumiamo quindi che A sia una matrice di ordine $m \times p$ e B una matrice di ordine $p \times n$. Il prodotto $A \cdot B$ è la matrice C di ordine $m \times n$ i cui elementi c_{ij} sono definiti come:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

In altri termini, il generico elemento c_{ij} della matrice

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \mathbf{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

del prodotto tra la matrice A e la matrice B è la somma dei prodotti di ogni elemento della riga i-esima della matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \cdots & \mathbf{a_{ij}} & \cdots & \mathbf{a_{ip}} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}$$

per il corrispondente elemento della colonna j-esima della matrice

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \mathbf{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \mathbf{b_{2j}} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & \mathbf{b_{ij}} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & \mathbf{b_{pj}} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}.$$

Esempio 2.2
Determinare il prodotto delle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La prima cosa da fare è verificare che sia possibile effettuare il prodotto, quindi verificare cha il numero di colonne di A sia uguale al numero di righe della matrice B. In questo caso la dimensione di A è $[2 \times 3]$, mentre quella di B è $[3 \times 3]$, quindi *numero di colonne di* A = *numero di righe di* B = *3*. Si osservi che la dimensione della matrice prodotto si può ottenere semplicemente da $[2 \times 3] \cdot [3 \times 3] = [2 \times 3]$, quindi tenendo soltanto le righe di A e le colonne di B. Accertato che è possibile effettuare il prodotto, gli elementi di $[C]_{ij}$ si ottengono attraverso il prodotto riga per colonna. L'elemento c_{11} si ottiene come la somma dei prodotti degli elementi della *prima riga* della matrice A con i corrispondenti elementi della *prima colonna* della matrice B:

$$c_{11} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 0$$

Allo stesso modo, ad esempio, l'elemento c_{13} sarà calcolato come la somma dei prodotti degli elementi della *prima riga* della matrice A per i corrsipondenti elementi della *terza colonna* della matrice B:

$$c_{13} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 1$$

Continuando in questo modo per ogni riga $i = 1, 2$ di A e ogni colonna $j = 1, 2, 3$ di B si ottiene la matrice del prodotto $A \cdot B$:

$$A \cdot B = C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il prodotto tra due matrici **non è commutativo**. Ciò è evidente nel caso di matrici non quadrate. Infatti, se $A = A_{m \times p}$ e $B = B_{p \times n}$ allora il il prodotto $B\,A$ è impossibile per ragioni dimensionali se $n \neq m$, mentre il prodotto $A\,B$ è dimensionalmente possibile e si ottiene una matrice C di dimensione $[m \times p]\,[p \times n] = [m \times n]$. In generale, anche per le matrici quadrate, per cui è sempre possibile calcolare sia il prodotto $A\,B$ che il prodotto $B\,A$, si può avere che $A\,B \neq B\,A$. Quindi, a differenza degli insiemi numerici, la moltiplicazione definita nell'insieme delle matrici NON è communitativa. Vi sono altre differenze con gli insiemi numerici. Per esempio è noto che, dati α e $\beta \in \mathbb{R}$, può essere $\alpha\,\beta = 0$ solo se 1) $\alpha = 0$, 2) $\beta = 0$, 3) $\alpha = \beta = 0$. Anche questa proprietà non è vera, in generale, per le matrici. Per esempio, siano

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entrambe le matrici sono diverse dalla matrice nulla $O_{2\times 2}$. Tuttavia si ha:

$$A\,B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{2\times 2}.$$

Questo esempio mostra quanto sia problematico definire il rapporto tra matrici, visto che il prodotto tra matrici a) non è commutativo e b) può essere uguale alla matrice nulla, nonostante entrambe le matrici a prodotto siano diverse dalla matrice nulla. Si possono tuttavia dimostrare le seguenti proprietà:

(1) $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$.
(2) $A\,(B + C) = A\,B + A\,C$.
(3) $(A + B)\,C = A\,C + B\,C$
(4) $A\,O = O\,A = O$, dove O è la matrice nulla dello stesso ordine di A.
(5) $A\,(k\,B) = k\,A\,B$, dove A e B sono matrici e k è un generico scalare.

Inoltre, sia I_n una matrice diagonale di dimensione n con ogni elemento della diagonale principale pari ad 1:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dimostra facilmente che I_n è l'elemento neutro per la moltiplicazione fra matrici, quindi,

$$A\,I_n = I_n\,A = A.$$

I_n è detta matrice *identità*.

3. Matrice Inversa

3.1. Definizione di Invertibilità e Inversa. Sia A un matrice $n \times n$. Si dice che A è *invertibile* se esiste una matrice B, $n \times n$, tale che

$$A\,B = B\,A = I_n.$$

Non è detto che per tutte le matrici quadrate esista una matrice B che soddisfa alle equazioni precedenti. Tuttavia, se ciò avviene, si dice che B è la matrice inversa di A e si indica con A^{-1}. Se una matrice *non* è invertibile si dice *singolare*.

TEOREMA 3.1 (Unicità dell'inversa di una matrice). *Sia A una matrice $n \times n$. Sa A è invertibile allora la sua matrice inversa, A^{-1}, è unica.*

Dimostrazione. Si ipotizzi per assurdo che esistano due matrici, B_1 e B_2, che soddisfino alla condizione di invertibilità della matrice A:

$$A\,B_1 = B_1\,A = A\,B_2 = B_2\,A = I_n.$$

Consideriamo, tra le uguaglianze di sopra la seguente: $A\,B_2 = B_2\,A$ e moltiplichiamo ambo i membri di questa equazione per B_1 *a destra*[1]. Si ottiene $(A\,B_2)\,B_1 = (B_2\,A)\,B_1$. Per la proprietà associativa della moltiplicazione tra matrici (punto 1 delle proprietà sopra elencate) possiamo scrivere $(B_2\,A)\,B_1 = B_2\,(A\,B_1)$. Sostituendo questo risultato nell'equazione precedente si ottiene $(A\,B_2)\,B_1 = B_2\,(A\,B_1)$. Poiché B_1 e B_2 sono entrambe inverse di A allora $A\,B_1 = A\,B_2 = I_n$. Sostituendo questo nell'equazione precedente otteniamo $I_n\,B_1 = B_2\,I_n$ e, quindi, poiché I_n è l'elemento neutro del prodotto, $B_1 = B_2$. □

Due importanti proprietà dell'inversa di una matrice sono riportate nel seguente teorema.

Teorema 3.2. *Siano A e B due matrici $n \times n$ invertibili. Allora*
(1) $(A^{-1})^{-1} = A$
(2) $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.

Dimostrazione.
(1) Dalla definizione di inversa si ha che, se B è la matrice inversa di A, quindi $B = A^{-1}$, allora $A\,B = B\,A = I_n$. Notiamo che questa definizione è invariante (cioè non cambia) se scambiamo A e B. Questo implica che possiamo considerare A come l'inversa di B, quindi $A = B^{-1}$. Ricordando ora che $B = A^{-1}$ si ottiene $A = (A^{-1})^{-1}$, che è la tesi.
(2) Dimostriamo la seconda proprietà verificando che $B^{-1}\,A^{-1}$ è la matrice inversa di $A\,B$. Consideriamo quindi il prodotto $(A\,B)\,(B^{-1}\,A^{-1})$. Per la proprietà associativa si ha:

$$(A\,B)\,(B^{-1}\,A^{-1}) = A\,(B\,B^{-1})\,A^{-1} = A\,I_n\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I_n.$$

Allo stesso modo, se si considera il prodotto $(B^{-1}\,A^{-1})\,(A\,B)$ si ottiene:

$$(B^{-1}\,A^{-1})\,(A\,B) = B^{-1}\,(A^{-1}\,A)\,B = B^{-1}\,I_n\,B = B^{-1}\,B = I_n$$

e il teorema resta dunque provato.

□

Vedremo nel seguito del corso come determinare la matrice inversa. Per il momento occupiamoci invece delle proprietà della matrice trasposta, in particolare di alcune interessanti proprietà rispetto alle operazioni di somma e prodotto. In particolare, date due matrici, A e B, di dimensione $n \times n$ e uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ riesce:

[1] Si noti che per le matrici è importante indicare se si moltiplica a destra (post-moltiplicazione) o a sinistra (pre-moltiplicazione), mentre negli insiemi numerici ciò era irrilevante.

(1) $(A+B)^T = A^T + B^T$
(2) $(\alpha\, A)^T = \alpha\, A^T$
(3) $(A\, B)^T = B^T\, A^T$
(4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

La proprietà (1) si dimostra considerando l'equazione elemento per elemento:

$$[(A+B)^T]_{ij} = [A+B]_{ji} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = [A^T]_{ij} + [B^T]_{ij} = [A^T + B^T]_{ij}.$$

In maniera analoga si dimostra la proprietà (2):

$$[(\alpha\, A)^T]_{ij} = \alpha [A^T]_{ij}.$$

Per dimostrare la proprietà (3) si considerino separatamente i due termini dell'uguaglianza. Per il primo termine si ha:

$$[(A\, B)^T]_{ij} = [(A\, B)]_{ji} = \sum_{p=1}^{n} [A]_{jp}\, [B]_{pi}.$$

Per il secondo termine si ottiene invece:

$$[B^T\, A^T]_{ij} = \sum_{p=1}^{n} [B^T]_{ip}\, [A^T]_{pj} = \sum_{p=1}^{n} [B]_{pi}\, [A]_{jp} = \sum_{p=1}^{n} [A]_{jp}\, [B]_{pi}.$$

La proprietà è dunque provata. Per quanto riguarda la (4), per definizione $A\, A^{-1} = A^{-1}\, A = I_n$. Prendendo la trasposta di ciascun membro e ricordando che I_n è diagonale e quindi $I_n^T = I_n$, si ottiene:

$$(A\, A^{-1})^T = (A^{-1}\, A)^T = I_n,$$

da cui, applicando la prorietà (3), risulta:

$$(A^{-1})^T\, A^T = A^T\, (A^{-1})^T = I_n.$$

Pertanto $(A^{-1})^T$ è l'inversa di A^T, ovvero $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.