Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

19 - Determinante

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Consiglio

1. Introduzione

Una particolare caratteristica delle matrici quadrate è quella che possono essere invertite. Non tutte le matrici quadrate hanno però un'inversa. Vedremo adesso come è possibile verificare questa possibilità tramite una caratteristica che è associata a tutte (e solamente) le matrici quadrate: il *determinante*. Prima di addentrarci in tale argomento, vediamo alcuni concetti propedeutici.

1.1. Definizione di Permutazione. Sia n un numero intero positivo. Si definisce permutazione degli interi $1, 2, ..., n$ la sequenza di interi $i_1, i_2, ..., i_n$ ottenuta scambiando di posto uno o più elementi della sequenza $1, 2, ..., n$.

Esempio 1.1
Dato l'insieme $1, 2, 3$ le possibili permutazioni sono:

$$1,2,3; \quad 2,3,1; \quad 3,1,2; \quad 1,3,2; \quad 2,1,3; \quad 3,2,1.$$

Dati n elementi, è importante conoscere il numero delle possibili permutazioni. Si può dimostrare che questo numero è dato da $n!$[1].

1.2. Definizione: Permutazione Pari e Dispari. Una permutazione si dice *pari* se il numero di inversioni rispetto alla sequenza di partenza è *pari*. Altrimenti la permutazione si dice *dispari*.

Esercizio 1.1
Per determinare se una permutazione è pari o dispari è sufficiente costruire un diagramma in cui sia tracciato un segmento tra ogni elemento della sequenza di partenza e lo stesso elemento nella sequenza di arrivo e verificare se il numero di intersezioni (incroci) tra i segmenti è pari o dispari. Nei casi seguenti la prima riga rappresenta la sequenza (o insieme) di partenza e la seconda una permutazione. Calcolare il numero di incroci ed indicare se la permutazione è pari o dispari:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ & & \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ & & \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ & & \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

1.3. Definizione di Segno di una Permutazione. Si definisce *segno* di una permutazione e si indica con $sign(i_1, i_2, ..., i_n)$ il valore $+1$ se la permutazione è pari e -1 se la permutazione è dispari.
E' possibile dimostrare il seguente **teorema**: Sia $n > 1$, allora le permutazioni di n elementi saranno metà pari e metà dispari.

[1] Questi argomenti di calcolo combinatorio saranno trattati con maggiore attenzione nel corso di *Clacolo delle Probabilità*.

2. Definizione di Determinante

Sia A una matrice $n \times n$. Il determinante di A è uno scalare definito come segue:

$$|A| = \det(A) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} sign(i_1, i_2, \ldots, i_n)\, a_{1i_1}\, a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

In altri termini, il determinante di una matrice $n \times n$ si ottiene sommando i prodotti degli elementi della matrice stessa, dove la somma è estesa a tutte le possibili $n!$ permutazioni di n elementi. Si noti che nella precedente espressione del determinante l'indice della colonna è dato dalle permutazioni.
Dalla definizione di determinante si evince quanto possa essere complicato calcolare il determinante di una matrice quando la dimensione, n, è moderatamente alta. Per esempio con $n = 10$ è necessario sommare $10! = 3.628.800$ prodotti di 10 elementi!

Esempio 2.1
Sia A una generica matrice 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

In questo caso $n = 2$, quindi $n! = 2$ sono il numero di permutazioni di 2 elementi, specificamente $1, 2$ e $2, 1$. La prima permutazione è pari (0 incroci), quindi $sign(1, 2) = 1$ e la seconda è dispari (1 incrocio), quindi $sign(2, 1) = -1$. Utilizzando la definizione di determinante si ha che:

$$|A| = sign(1, 2)a_{11}a_{22} + sign(2, 1)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Quindi il determinante di una matrice 2×2 è la differenza dei prodotti incrociati degli elementi di A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esercizio 2.1
Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

Purtroppo una tale semplice regola non si può estendere ai casi in cui $n > 2$.

Esempio 2.2
Sia B una matrice 3×3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In questo caso $n = 3$. Quindi il numero di permutazioni è pari a $3! = 6$ e le permutazioni degli indici sono:

$$\begin{array}{ccc} (+\mathbf{1}) & (-\mathbf{1}) & (+\mathbf{1}) \\ 1\ 2\ 3 & 2\ 1\ 3 & 3\ 1\ 2 \\ & & \\ 1\ 3\ 2 & 2\ 3\ 1 & 3\ 2\ 1 \\ (-\mathbf{1}) & (+\mathbf{1}) & (-\mathbf{1}) \end{array}$$

Tra parentesi è riportato il segno della permutazione. Il determinante sarà dunque:

$$|B| = b_{11}\, b_{22}\, b_{33} + b_{12}\, b_{23}\, b_{31} + b_{13}\, b_{21}\, b_{32} - b_{11}\, b_{23}\, b_{32} - b_{12}\, b_{21}\, b_{33} - b_{13}\, b_{22}\, b_{31}$$

sostituendo gli elementi di B si ha:

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = -3.$$

Per le matrici di ordine 3 esiste una regola che semplifica il calcolo del determinante, detta *Regola di Sarrus*. Tuttavia, vista la sua limitata applicabilità, ne omettiamo qui l'illustrazione. Vediamo, invece, come è possibile sfruttare alcune caratteristiche e proprietà delle matrici al fine di semplificare il calcolo del determinante. Vediamo prima alcune definizioni.

2.1. Definizione di *Minore*. Sia A una matrice quadrata $n \times n$.

Si definisce *minore di ordine k* il determinante di qualsiasi sottomatrice di A che si ottiene rimuovendo $n-k$ righe e $n-k$ colonne da A.

Si definisce *minore complementare (i,j)*, e si indica (tipicamente) con M_{ij}, il determinante di ordine $n-1$ della sottomatrice di A che si ottiene rimuovendo l'i-esima riga e la j-esima colonna di A.

Si definisce *minore principale di ordine k* il determinante di qualsiasi sottomatrice di A che si ottiene eliminando $n-k$ righe e le corrispondenti $n-k$ colonne da A.

Si definisce *minore principale dominante di ordine k* il determinante della sottomatrice di A che si ottiene eliminando le *ultime* $n-k$

righe e le ultime $n-k$ colonne da A.

Si noti che mentre i determinanti si possono calcolare *solo* per matrici quadrate i minori possono essere calcolati anche per matrici rettangolari $m \times n$ con $m \neq n$.

Esempio 2.3
Sia A una matrice 3×3 definita come segue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

I minori di ordine 2 corrispondono ai minori complementari in quanto dobbiamo eliminare $n-k=3-2=1$ riga ed $n-k=3-2=1$ colonna. Essi sono:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \;;\; M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \;;\; M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix};$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \;;\; M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \;;\; M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix};$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \;;\; M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \;;\; M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix};$$

Chiaramente il minore di ordine 3 coincide con il determinante di A. Si lascia allo studente di calcolare i minori di ordine 1.

I minori principali di ordine 2 sono i determinanti di sottomatrici che si ottengono eliminando 3-2=1 riga e la corrispondente colonna. Quindi, se si inizia eliminando la prima riga allora si deve eliminare la prima colonna e così via. Quindi i minori principali di ordine 2 saranno M_{11}, M_{22} e M_{33}. Il minore principale di ordine 3 sarà il determinante di A stessa. Lo studente determini i minori di ordine 1. E' possibile dimostrare che il numero totale di minori principali di una matrice di ordine n è $2^n - 1$, in questo caso pari a 7. Il numero totale di minori principali dominanti di una matrice $n \times n$ è pari a n, quindi a 3 nel nostro esempio. I minori principali dominanti di ordine 3, 2 e 1 sono rispettivamente:

$$|A| \;,\; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \;,\; |1|.$$

2.2. Definizione di Cofattore. Sia M_{ij} un minore complementare di una matrice quadrata di ordine n. Si definisce *cofattore relativo alla posizione (i,j)*, e si indica con A_{ij}, il minore complementare M_{ij} avente segno $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}.$$

Teorema 2.1 (Sviluppo di Laplace). *Sia A una matrice $n \times n$, allora:*

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} \quad \textit{(Sviluppo per Riga)}$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} \quad \textit{(Sviluppo per Colonna)}$$

Lo sviluppo di Laplace consente quindi di calcolare un determinante di ordine n tramite il calcolo di determinanti di ordine $n-1$, tale è infatti l'ordine dei cofattori. In generale questo approccio *non* è più efficiente del metodo implicito nella definizione di determinante. Tuttavia, in taluni casi, la struttura della matrice può facilitare lo sviluppo del determinante rispetto ad una certa riga o colonna.

Esempio 2.4
Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tenendo a mente lo sviluppo di Laplace, conviene calcolare questo determinante sviluppandolo rispetto alla prima riga oppure rispetto alla prima colonna. Sviluppiamolo rispetto alla riga $i = 1$. Si ha:

$$\begin{aligned} |A| &= 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -(0 \cdot 5 - 3) = 3 \end{aligned}$$

E' lasciato allo studente mostrare che allo stesso risultato si può pervenire sviluppando, ad esempio, rispetto alla colonna $j = 1$.

Come accennato, nel caso in cui la matrice non contenga zeri, lo sviluppo di Laplace non semplifica molto il calcolo del determinante. Vediamo quindi alcune conseguenze dello sviluppo di Laplace per matrici con particolari caratteristiche.

Corollario 2.2. *Sia A una matrice diagonale $n \times n$. Allora*

$$|A| = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Dimostrazione. Questo risultato segue direttamente dal calcolo del determinante tramite lo sviluppo di Laplace. Infatti $|A| = a_{11}A_{11}$ dove A_{11} è il cofattore relativo alla posizione $(1,1)$. Quindi $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11}$, dove M_{11} è il minore complementare $(1,1)$. Esso rappresenta il determinante della sottomatrice di $|A|$ ottenuta rimuovendo la prima riga e la prima colonna. Dunque anche questa sottomatrice di ordine $n-1$ sarà diagonale e il suo elemento (1,1) sarà il coefficiente a_{22} di A. Dunque anche M_{11} può essere sviluppato secondo Laplace. Si ottiene che $M_{11} = a_{22}|B|$, dove $|B|$ è il determinante di un'altra matrice diagonale che avrà come elemento (1,1) l'elemento a_{33} della matrice A. Iterando si ottiene dunque la tesi. □

Il corollario appena visto ha un valore più generale, in quanto esso si applica anche a *matrici triangolari*, ovvero matrici quadrate che hanno tutti gli elementi *sotto* la diagonale uguali a *zero* (matrice triangolare alta):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

oppure sopra la diagonale uguali a zero (triangolare bassa):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Esercizio 2.2
Verificare che il determinante di una matrice triangolare $n \times n$ è uguale a:

$$|A| = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Corollario 2.3. *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se A ha una riga o una colonna di elementi nulli allora $|A| = 0$.*

Le proprietà ora descritte possono essere utilizzate per definire un algoritmo il cui obiettivo è quello di determinare il valore del determinante evitando di utilizzare la sua definizione o lo sviluppo di Laplace, che, come visto, in generale non è poi così efficiente.
A tale scopo si osservi che se si riuscisse a trasformare la matrice A, attraverso alcune operazioni, in una matrice B, triangolare alta o bassa, (con lo stesso determinate di A), allora potremmo facilmente calcolare questo determinante. Per far questo, le operazioni svolte su A *non* devono cambiarne il determinante, o, al più devono cambiarlo in modo completamente (e semplicemente) prevedibile. Vediamo alcune di queste operazioni.

Teorema 2.4 (Operazioni elementari). *Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia B una matrice dello stesso ordine di A ottenuta da A tramite una delle seguenti operazioni per riga.*

(1) *Scambiare la i-esima riga con la j-esima riga.*
(2) *Moltiplicare la i-esima riga per $\alpha \neq 0$.*
(3) *Sommare all'i-esima riga α volte la j-esima riga.*

Allora il determinante di B, $|B|$ è dato da:
(1) $|B| = -|A|$.
(2) $|B| = \alpha|A|$.
(3) $|B| = |A|$.

I risultati di tale teorema valgono anche se tali operazioni sono applicate alle colonne di A.

COROLLARIO 2.5. *Sia A una matrice di ordine n avente due righe o due colonne uguali. Allora $|A| = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Se una matrice ha due righe (o colonne) uguali, allora scambiando queste due righe (o colonne) si ottiene la stessa matrice. Tuttavia per la proprietà (1) di sopra il determinante cambierà di segno a seguito dello scambio. Quindi $|A| = -|A|$. Ma l'unico numero uguale al suo opposto è 0. Allora $|A| = 0$. □

Noto l'effetto delle operazioni elementari sul determinante di una matrice, possiamo utilizzare tali operazioni per trasformare la matrice iniziale in una matrice triangolare, il cui determinante è di facile calcolo.
Il processo che, tramite operazioni elementari, trasforma una matrice qualsiasi in una triangolare è detto **Risoluzione di Gauss**. Spieghiamo il metodo attraverso il seguente esempio.

Valutare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Non è possibile stabilire a priori quale operazione elementare ci condurà più facilmente ad una matrice triangolare. E' necessario un po' di intuito e di esperienza. Per esempio si scambi la riga 2 con la riga 3, pertanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Il nostro prossimo obiettivo è di trasformare gli elementi a_{31} e a_{32} in zeri. Conviene sempre iniziare a trasformare gli elementi da sinistra. Consideriamo quindi l'elemento $a_{31} = 3$. Possiamo trasformare questo elemento in 0 sommando alla terza riga della matrice α volte la prima riga con α tale che $\alpha a_{11} + a_{31} = 0$. Quindi $\alpha = -3/2$. Questa trasformazione non altera il valore del determinante. Quindi:

$$|A| = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{vmatrix}.$$

Non resta quindi che annullare l'elemento $a_{32} = -5/2$. Per far questo conviene modificare la riga 3 usando solo la riga 2, in modo da non alterare il valore di $a_{31} = 0$. Si potrebbe procedere come in precedenza e sommare alla riga 3 β volte la riga 2 con β tale che $\beta a_{22} + a_{32} = 0$. Lo studente mostri che in questo modo si può arrivare ad ottenere il valore del determinante che di seguito otterremo per altra via. In particolare, si moltiplichi la terza riga per $\gamma = 2/5$. In questo modo il determinante di A andrà moltiplicato per $1/\gamma = 5/2$. Otteniamo:

$$|A| = -\frac{5}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{7}{5} \end{vmatrix}.$$

Sommando, a questo punto, la riga 2 e la riga 3 non si altera il valore del determinante e si ottiene il risultato desiderato, ovvero una matrice triangolare di cui sappiamo calcolare facilmente il determinante:

$$|A| = -\frac{5}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} \cdot \left(2 \cdot 1 \cdot \frac{12}{5} \right) = -12.$$

Si osservi che tramite ulteriori operazioni per riga è possibile trasformare la matrice di partenza in una matrice identità, se il determinante risulta diverso da 0, come nel nostro caso.. Chiaramente ciò non è necessario per il calcolo del determinante, ma ci sarà utile in seguito. In particolare, se indichiamo con R_i la riga i-esima della matrice abbiamo:

$$|A| = -\tfrac{5}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{vmatrix} \overset{R_1 - R_2}{=} -\tfrac{5}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{vmatrix} \overset{R_1 + \frac{5}{6} R_3}{=}$$

$$= -\tfrac{5}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{vmatrix} \overset{R_2 - \frac{5}{12} R_3}{=} -\tfrac{5}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{vmatrix} \underset{R_3 \cdot \frac{5}{12}}{\overset{R_1 \cdot \frac{1}{2}}{=}}$$

$$= -\tfrac{5}{2} \cdot 2 \cdot \tfrac{12}{5} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \cdot |I_3| = -12,$$

visto che il determinante della matrice identità è pari a 1: $|I_3| = 1$. Il processo ora mostrato per trasformare una matrice (con determinante diverso da zero) in una matrice identià e noto come *Risoluzione di Gauss-Jordan.*

TEOREMA 2.6 (Teorema di Binet). *Siano A e B due matrici di ordine n, allora*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Questo risultato può essere generalizzato al prodotto di k matrici:

$$\det(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \cdots \det(A_k).$$

Un teorema che sfrutta il precedente risultato fornisce una condizione necessaria di invertibilità di una matrice.

TEOREMA 2.7. *Sia A una matrice invertibile, allora:*

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

DIMOSTRAZIONE. Essendo A invertibile allora esiste A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = I_n$. Per il teorema di Binet, si ha $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$. D'altro canto $\det(I_n) = 1$. Quindi: $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$, da cui la tesi. $\square$

Quindi, se A è invertibile $\Rightarrow |A| \neq 0$. Come vedremo, questa condizione è anche sufficiente, ossia A è invertibile $\iff |A| \neq 0$.

3. Matrici Elementari

Si definisce *matrice elementare di ordine n* una matrice identità I_n su cui è stata effettuata una delle operazioni elementari di riga o colonna.

Esempio 3.1
Sia I_3 la matrice identità di ordine 3:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è una matrice elementare di *tipo I* in quanto ottenuta dallo scambio della riga 2 con la riga 3. Si ha, dunque, $|E| = -|I_3| = -1$. La matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \text{ con } \alpha \neq 0,$$

è una matrice elementare di *tipo II*, in quanto ottenuta moltiplicando la riga 3 di $|I_3|$ per $\alpha \neq 0$. Il determinate di E sarà dunque $|E| = \alpha \cdot |I_3| = \alpha$. Infine, la matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ con } \alpha \neq 0,$$

è una matrice elementare di *tipo III*, in quanto ottenuta sommando alla riga 2 α volte la riga 3. In questo caso, $|E| = |I_3| = 1$.

Una matrice elementare, quindi, ha sempre determinante diverso da zero e uguale a $+1$, -1 o α. Le matrici elementari sono importanti perché consentono di rappresentare una operazione per riga (colonna) tramite il prodotto di matrici. In particolare, pre-moltiplicando (post-moltiplicando) una matrice elementare per una matrice si ottiene una matrice cui è stata applicata una operazione elementare per riga (colonna).

Esempio 3.2
Sia A la stessa matrice considerata in precedenza come esempio di calcolo del determinante attraverso l'applicazione successiva di operazioni elementari:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per operare lo scambio tra la riga 2 e la riga 3 possiamo pre-moltiplicare per

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene

$$E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per il teorema di Binet sarà $|E_1 \cdot A| = |E_1| \cdot |A| = -|A|$, da cui $|A| = -|E_1 \cdot A|$, il ché coincide con il primo passo della riduzione di Gauss della matrice A. Lo studente mostri che pre-moltiplicando ad $E \cdot A$ la matrice

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si perviene alla seconda matrice del processo di riduzione di Gauss visto in precedenza, ossia

$$E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5/2 & 7/2 \end{bmatrix}.$$

Per il teorema di Binet si ha $|E_2 \cdot E_1 \cdot A| = |E_2| \cdot |E_1| \cdot |A| = 1 \cdot (-1) \cdot |A|$, da cui $|A| = -|E_2 \cdot E_1 \cdot A|$.

Da questo esempio si può concludere che un processo di riduzione può essere rappresentato dal prodotto di un numero finito matrici elementari

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A = B,$$

dove B è una matrice triangolare bassa o alta.

Si consideri adesso una matrice A di ordine n e si assuma che esista un insieme finito di matrici elementari tali che:

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A = I_n,$$

cioè che sia possibile trasformare A, tramite una riduzione di Gauss-Jordan, in una matrice identità di ordine n. Si osservi che $E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 = C$ è una matrice di ordine n. Quindi possiamo scrivere $C \cdot A = I_n$. In altri termini C è una matrice che moltiplicata per A determina una matrice identità. Questa non è altro che la definizione di inversa di una matrice, pertanto $C = E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 = A^{-1}$.

Come è noto *non* tutte le matrici sono invertibili. Se A non è invertibile, tramite la riduzione di Gauss-Jordan, si otterrà una matrice in cui una o più righe (colonne) avranno elementi tutti nulli e quindi $E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A \neq I_n$, e per definizione A non è invertibile.

TEOREMA 3.1. *Una matrice A di ordine n è invertibile se e solo se* $|A| \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo prima l'implicazione: se A è invertibile $\Rightarrow |A| \neq 0$. Come visto, se A è invertibile esiste un insieme finito di matrici elementari tale che:

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A = I_n.$$

Prendendo il determinante di ambo i membri dell'equazione precedente ed applicando il teorema di Binet si ha che

$$|E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A| = |E_k| \cdot |E_{k-1}| \cdots |E_1| \cdot |A| = 1.$$

Abbiamo già visto che il determinante di una matrice elementare è sempre diverso da zero. Possiamo quindi porre $|E_k| \cdot |E_{k-1}| \cdots |E_1| = d \neq 0$ da cui $|A| = \frac{1}{d} \neq 0$.

Proviamo ora l'implicazione inversa: se $|A| \neq 0 \Rightarrow A$ è invertibile. Tramite il processo di riduzione di Gauss-Jordan si può ottenere da A una matrice identità I_n oppure una matrice avente una o più righe e colonne aventi tutti gli elementi nulli:

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A = B,$$

dove $B = I_n$ oppure B ha una o più righe con elementi tutti nulli. Per ipotesi $|A| \neq 0$ e poiché le matrici elementari hanno tutte determinante diverso da zero $|E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1| \neq 0$, allora anche B deve avere determinante diverso da zero. Quindi $B = I_n$. Infatti, se B avesse una o più righe o colonne con tutti gli elementi nulli allora sarebbe $|B| = 0$. Pertanto, se $|A| \neq 0$ allora $B = I_n$ e dall'equazione di sopra la matrice inversa di A è $A^{-1} = E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1$. □

La rappresentazione del processo di riduzione di Gauss-Jordan attraverso il prodotto di (un numero finito di) matrici elementari fornisce un algoritmo per il calcolo della matrice inversa. In particolare si ipotizzi che esistano k matrici elementari tali che $E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A = I_n$.

Sarebbe estremamente inefficiente determinare le k matrici e poi moltiplicarle per ottenere l'inversa. Si ricordi, comunque, che premoltiplicare A per una matrice elementare equivale ad effettuare un'operazione elementare su A. Si consideri la matrice

$$[A \mid I_n]$$

ottenuta affiancando alla matrice A la matrice identità dello stesso ordine di A. Nell'esempio precedente sarebbe:

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Pre-moltiplicare $[A \mid I_n]$ per una matrice elementare equivale ad effettuare un'operazione per riga. Nello specifico pre-moltiplicando per

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$[E_1 \cdot A \mid E_1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Pre-moltiplicando il risultato precedente per

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$[E_2 \cdot E_1 \cdot A \mid E_2 \cdot E_1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5/2 & 7/2 & -3/2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Continuando il processo di riduzione si otterrà, in generale,

$$[E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A | E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1].$$

Ma, $E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A = I_n$ e $E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 = A^{-1}$, quindi il risultato finale del processo di riduzione sarà:

$$[E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A | E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1] = [I_n | A^{-1}].$$

Questo risultato implica che, partendo dalla matrice $[A|I]$, effettuando delle operazioni per riga al fine di trasformare A in una matrice identità, otterremo alla fine del processo, nella parte aggiunta, l'inversa di A. Graficamente

$$[A \mid I_n] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[I_n \mid A^{-1}\right]$$

Se la matrice non è invertibile, invece della matrice identità si otterrà una matrice con una o più righe avente elementi tutti nulli.

Esempio 3.3
Determinare la matrice inversa di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgimento:

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

La matrice non è invertibile in quanto la terza riga è composta da elementi nulli. Si osservi che la matrice A è stata trasformata in una matrice triangolare, e, a meno di cambi di segno o costanti, che in questo caso specifico non sussistono in quanto abbiamo utilizzato solo operazioni di *tipo III*, il prodotto degli elementi della diagonale principale della matrice ottenuta è il determinante di A. In questo caso $|A| = 0$, che abbiamo visto essere una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice *non* sia invertibile. Lo studente determini la matrice inversa dell'esempio visto in precedenza in cui $|A| = -12$. Un'ultima proprietà dei determinanti è data dal seguente teorema.

Teorema 3.2. *Sia A una matrice quadrata, allora*

$$\det\left(A^T\right) = \det(A).$$

Il teorema si dimostra facilmente utilizzando lo sviluppo di Laplace per il calcolo del determinante.

Esercizio 3.1
Calcolare, sfruttando lo sviluppo di Laplace, il determinante delle matrici A, B e $A \cdot B$ e mostrare che $|A| \cdot |B| = |A \cdot B|$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3.2
Verificare se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, determinare la matrice inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad ; D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$