Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dip. di Scienze Statistiche e Matematiche “Silvio Vianelli”

Appunti del corso di Matematica Generale

Le Serie

Anno Accademico 2009/2010

V. Lacagnina - S. Piraino

Homines, dum docent, discunt
Quando insegnano, gli uomini imparano
SENECA

Realizzazione e sviluppo in LaTeX di Valerio Lacagnina (18/11/2009)

1. Definizione di serie

Sia a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... una successione di numeri reali. Consideriamo l'espressione

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Formalmente tale espressione rappresenta la somma degli infiniti numeri reali, termini della successione data. Chiamiamo tale espressione *serie numerica* e la indichiamo sinteticamente con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Ci chiediamo se tale espressione possa assumere un significato numerico. Per rispondere alla domanda, introduciamo il concetto di *somma parziale*: definiamo somma parziale di ordine n della serie, la somma dei suoi primi n termini. Indichiamo tale somma con S_n. Attribuendo ad n i valori 1, 2, 3, ..., otteniamo

$$\begin{array}{l} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ \cdots \\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ \cdots \end{array}$$

Facendo crescere indefinitamente n, le somme parziali tendono all'espressione formale $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ che abbiamo chiamato serie numerica. D'altro canto se al crescere indefinitamente di n, S_n converge ad $S \in \mathbb{R}$, possiamo attribuire all'espressione un significato numerico scrivendo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

dicendo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente e che ha somma S.

Se al crescere indefinitamente di n, S_n è divergente, positivamente o negativamente, scriveremo rispettivamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty.$$

e diremo che la serie è divergente, positivamente o negativamente. Se S_n non converge ne diverge, diremo che la serie è indeterminata.

Esempio 1.1
Consideriamo la *serie di Mengoli*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k\cdot(k+1)}$$

di cui la somma parziale di ordine n è

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\\ &= 1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Essendo il

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

la serie considerata è convergente ed ha somma 1.

1.1. La serie geometrica. Consideriamo la serie

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k+\cdots=\sum_{k=1}^{+\infty}x^{k-1}$$

essendo x un numero reale arbitrario.
Dal fatto che i termini della serie sono in *progressione geometrica* di ragione x, la serie prende il nome di *serie geometrica*.

È evidente che il comportamento o carattere della serie dipende dal valore di x.
Se $x = 1$ la serie diviene la somma di infiniti 1 e pertanto $S_n = n$. Conseguentemente, essendo $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, la serie è divergente.
Se $x \neq 1$, S_n, per una nota formula sulle progressioni geometriche, assume l'espressione

$$S_n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}$$

Se $|x| < 1$, poichè $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$, S_n converge a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

e quindi la serie converge.
Se $x > 1$, poichè $\lim_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^n}{1-x} = +\infty$, la serie diverge a $+\infty$.

Se $x \le -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n$ non esiste e di conseguenza la serie geometrica è indeterminata.

1.2. Prima osservazione. Date m serie, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{(1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{(2)}$, ..., $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{(m)}$, tutte convergenti con rispettive somme $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ..., $S^{(m)}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_1 a_n^{(1)} + c_2 a_n^{(2)} + \cdots + c_m a_n^{(m)}\right)$$

combinazione lineare delle serie date attraverso le costanti reali c_1, c_2, ..., c_m, è convergente ed ha per somma la combinazione lineare, attraverso le stesse costanti, della somma delle singole serie, ossia

$$c_1 S^{(1)} + c_2 S^{(2)} + \cdots + c_m S^{(m)}$$

Indicando con $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, ..., $S_n^{(m)}$, le somme parziali di ordine n delle serie date, la somma parziale S_n della serie combinazione lineare è

$$S_n = c_1 S_n^{(1)} + c_2 S_n^{(2)} + \cdots + c_m S_n^{(m)}$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S_n &= c_1 \lim_{n\to+\infty} S_n^{(1)} + c_2 \lim_{n\to+\infty} S_n^{(2)} + \cdots + c_m \lim_{n\to+\infty} S_n^{(m)} = \\
&= c_1 S^{(1)} + c_2 S^{(2)} + \cdots + c_m S^{(m)}
\end{aligned}$$

c.v.d.

1.3. Seconda osservazione. Sia data la serie

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Se in essa sopprimiamo i primi p termini si ottiene una nuova serie

$$a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{p+n} + \cdots$$

a cui si da il nome di *resto di ordine p* della serie data. Indicando con S_n e R_n le somme parziali di ordine n rispettivamente della serie data e della serie resto, esse sono legate dalla relazione

$$T_n = S_{p+n} - S_p$$

Infatti

$$R_n = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{p+n}$$

$$S_{p+n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{p+n}$$

di conseguenza

$$\begin{aligned}
R_n = \ & a_1 + a_2 + \cdots + a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{p+n} + \\
& -(a_1 + a_2 + \cdots + a_p) = S_{p+n} - S_p
\end{aligned}$$

Pertanto l'esistenza del limite di T_n è legata all'esistenza del limite di S_{p+n} ossia del limite di S_n. Possiamo pertanto scrivere

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n+p} - S_p$$

Possiamo quindi enunciare:

> Il resto di ordine p di una data serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è una nuova serie che ha lo stesso carattere della serie data. Se la serie data è convergente con somma S, il suo resto di ordine p è una serie convergente con somma uguale a
>
> $$S - (a_1 + a_2 + \cdots + a_p)$$
>
> Viceversa se il resto è convergente con somma R, la serie data è convergente con somma
>
> $$R + a_1 + a_2 + \cdots + a_p$$

2. Serie a termini di segno costante

Intendiamo affrontare lo studio delle serie i cui termini sono tutti dello stesso segno, che supponiamo non negativo.

TEOREMA 2.1. *Una serie a termini non negativi è convergente o divergente e ha per somma l'estremo superiore dell'insieme numerico costituito dai valori distinti assunti dalla somma parziale S_n.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo per ipotesi gli $a_n \geq 0$ allora la successione delle somme parziali è non decrescente e quindi, richiamando il teorema sui limiti delle successioni monotone, il limite di S_n esiste ed è finito o $+\infty$. □

TEOREMA 2.2 (Criterio del confronto). *Siano $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi. Se definitivamente*

$$a_n \leq c\, b_n$$

essendo c una costante reale positiva, allora dalla convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ segue la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, dalla divergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ segue la divergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con S_n e T_n le somme parziali di ordine n, rispettivamente, della prima e della seconda serie.
Dall'ipotesi che $a_n \leq c\, b_n$ segue che

$$S_n \leq c\, T_n$$

Passando al limite si ha

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \leq c \lim_{n\to+\infty} T_n$$

Pertanto se $\lim_{n\to+\infty} T_n$ è finito anche il limite di S_n è finito e di conseguenza la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente; se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ è $+\infty$ anche il limite di T_n è $+\infty$ e di conseguenza la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è divergente □

Esempio 2.1

Consideriamo la *serie armonica generalizzata* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$.

Nel caso in cui $0 < \alpha \leq 1$ è evidente che $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$

Essendo la *serie armonica* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergente anche la serie data, con $0 < \alpha < 1$ è divergente.

Dimostreremo più avanti che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, con $\alpha > 1$, è convergente.

Corollario 2.3 (del teorema del confronto). *Siano* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *due serie a termini positivi. Se esistono due costanti positive* a, b *tali che*

$$a \leq \frac{a_n}{b_n} \leq b$$

allora le serie date hanno lo stesso carattere, cioè sono entrambe convergenti o entrambe divergenti positivamente.

Dimostrazione. Partendo dall'ipotesi che esistano due costanti, a e b, positive tali che $a \leq \frac{a_n}{b_n} \leq b$ segue che:

$$a \ b_n \leq a_n \leq b \ b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente, essendo per la relazione precedente $a_n \leq b \, b_n$, segue per il teorema del confronto (2.2) che la $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è divergente, dalla relazione $a \, b_n \leq a_n$ segue che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è divergente in quanto minorata da una serie divergente.

Pertanto le due serie hanno lo stesso carattere. □

TEOREMA 2.4 (Criterio del confronto nella forma di limite). *Siano* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *due serie a termini positivi. Se esiste finito e diverso da zero il* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *le serie date hanno lo stesso carattere.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti posto $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$, per la definizione di limite finito, esiste, posto $\epsilon = \frac{l}{2}$, definitivamente la relazione

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}\, l$$

Per il corollario (2.3), identificando a con $\frac{l}{2}$ e b con $\frac{3}{2}\, l$, le due serie hanno lo stesso carattere.
In particolare

se $l \geq 0$ dalla convergenza della $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ segue la convergenza della $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$;

se $l \neq 0$ dalla divergenza della $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ segue la divergenza della $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

□

Una conseguenza del criterio del confronto nella forma di limite (2.4) è la seguente:

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi ed esista un $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \;\; a_n = l$$

allora

(1) se $l \in [0, +\infty[$ e $\alpha > 1$ la serie data è convergente;
(2) se $l \in]0, +\infty[$ e $\alpha \leq 1$ la serie data è divergente.

2.1. Esercizi svolti. Vediamo alcuni esercizi svolti sulle serie e sui criteri di convergenza fino a qui sviluppati.

Esercizio 2.1

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

La serie considerata, scritta nella forma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, coincide con la serie armonica generalizzata con $\alpha = \frac{1}{3}$. Pertanto la serie data diverge positivamente.

Esercizio 2.2

Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt[3]{n}}$.

essendo $\displaystyle\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad \forall\, n > 2$

Utilizzando il criterio del confronto (2.3), deduciamo che la serie data è divergente perchè minorata da una serie divergente.

Esercizio 2.3

Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[2n]{n}} + \frac{1}{n}\right)^n$.

Essendo

$$\left(\frac{1}{\sqrt[2n]{n}} + \frac{1}{n}\right)^n > \left(\frac{1}{\sqrt[2n]{n}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

considerato che la serie minorante diverge positivamente, anche la serie data diverge positivamente.

Esercizio 2.4

Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)$.

Utilizzando il corollario (2.3), consideriamo il limite $n^\alpha\, a_n$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}{\frac{1}{n^2}} = \ln e = 1$$

Essendo $\alpha = 2$ la serie data ha lo stesso comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, pertanto è convergente.

Esercizio 2.5

Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ \ln(n+1)}$.

L'espressione del termine generale della serie suggerirebbe di confrontare la serie con la serie di termine generale $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}$, tuttavia passando al limite

$$\lim_{n\to+\infty} \cancel{\sqrt{n}} \frac{1}{\cancel{\sqrt{n}}\ \ln(n+1)} = 0$$

essendo $\alpha = \dfrac{1}{2}$ e $l = 0$, il criterio non permette di desumere il carattere della serie data. Se invece confrontiamo con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, ci rendiamo conto che la serie è divergente. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} n\frac{1}{\sqrt{n}\ \ln(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)} = +\infty$$

Esercizio 2.6

Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+4\cos n}{3+5n^3}$.

Il termine generale della serie è infinitesimo. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n+4\cos n}{3+5n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n}{5n^3+3} + \frac{4}{3+5n^3}\cos n = 0+0=0$$

Il limite del secondo addendo è zero in quanto prodotto di una successione infinitesima $\dfrac{4}{3+5n^3}$ e di una successione definitivamente limitata $\cos n$. Confrontiamo la serie data con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{5n+4\cos n}{3+5n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3}{5n^3+3} + \frac{4n^2}{3+5n^3}\cos n = 1+0=1$$

Pertanto la serie data è convergente.

Esercizio 2.7

Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n}$. Essendo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

La serie data è maggiorata dalla serie geometrica di ragione $\dfrac{1}{2}$. Pertanto dalla convergenza della seconda segue la convergenza della serie data.

Esercizio 2.8

Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Si vede immediatamente che la serie è divergente, perchè?

2.2. Criterio della radice e criterio del rapporto. Introduciamo due criteri che ci permettono di desumere il carattere di una serie data a termini non negativi o positivi per confronto con la serie geometrica.

Teorema 2.5 (Criterio della radice o di Cauchy). *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini non negativi. Se esiste un* $x \in]0,1[$ *tale che sia definitivamente* $\sqrt[n]{a_n} \leq x$ *allora la serie data è convergente.*
Se definitivamente risulta $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *allora la serie data è divergente.*

Dimostrazione. Dall'ipotesi che esista un $x \in]0,1[$: $\sqrt[n]{a_n} \leq x$ segue che

$$a_n \leq x^n$$

ossia la serie data è maggiorata da una serie geometrica di ragione $0 < x < 1$ convergente. Pertanto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.
Se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ segue che la successione che ha generato la serie non può essere infinitesima in quanto i suoi termini sono maggiori o uguali ad 1 definitivamente. Essendo la serie a termini non negativi, non potendo convergere, diverge. □

Esprimiamo il criterio della radice nella forma di limite:

Teorema 2.6 (Criterio della radice sotto forma di limite). *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini non negativi. Se esiste* $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ *segue che la serie data è convergente per* $l < 1$*, la serie data è divergente per* $l > 1$*.*

Dimostrazione. Dimostriamo che se esiste $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.
Dall'ipotesi che $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ segue per la definizione di convergenza che

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n(\epsilon) : \forall n > n(\epsilon) \Rightarrow l - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \epsilon$$

Essendo la precedente vera per qualunque ϵ, in corrispondenza di un valore di ϵ tale che $l + \epsilon < 1$ esiste $n(\epsilon)$ tale che per ogni $n > n(\epsilon)$ si ha $\sqrt[n]{a_n} < l + \epsilon < 1$ ossia definitivamente $a_n < (l + \epsilon)^n$, per cui la serie data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è maggiorata da una serie geometrica di ragione $0 < l + \epsilon < 1$. Pertanto dalla convergenza della seconda segue la convergenza della serie data. □

Esempio 2.2

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

La condizione necessaria per la convergenza di una serie è verificata

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\frac{n}{2n+1}} = e^{\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{n}{2n+1}} =$$

$$= e^{+\infty\ln\frac{1}{2}} = e^{+\infty(-ln2)} = e^{-\infty} = 0$$

Applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2},\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Di conseguenza la serie data è convergente.

Esercizio 2.9

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{ne^n}$.

Applichiamo il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{ne^n}} = \frac{1}{e}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \le \frac{1}{e},\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La serie è convergente.

Esercizio 2.10

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n+1}{2^n-1}$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{5^n+1}{2^n-1}} \ge \sqrt[n]{\frac{5^n}{2^n}} > \frac{5}{2} > 1,\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La serie data è divergente.

Esercizio 2.11

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}2^{\ln n}$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^{\ln n}} \ge 2^{\frac{\ln n}{n}} \ge 1,\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La serie data è divergente. D'altronde si vede chiaramente che il termine generale della serie non è infinitesimo.

Esercizio 2.12

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n}{(2x)^n}$, $x > 0$.

Applichiamo il criterio della radice nella forma di limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n}{(2x)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sin\frac{1}{n}}{2x} = \frac{1}{2x}$$

Di conseguenza, imponendo la condizione di convergenza $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ si ha

$$\frac{1}{2x} < 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

ossia per $x > \frac{1}{2}$ la serie data è convergente. Per $x < \frac{1}{2}$ la serie è divergente. Per $x = \frac{1}{2}$ segue che

$$\sqrt[n]{a_n} = 1 + \sin\frac{1}{n} > 1$$

Applicando il criterio della radice, ci rendiamo conto che la successione che genera la serie non è infinitesima. Essendo una serie a termini positivi non convergente, possiamo affermare che per $x = \frac{1}{2}$ la serie diverge.

Teorema 2.7 (Criterio del rapporto o di D'Alembert). *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini positivi. Se è possibile determinare un numero* $x \in]0,1[$ *tale che*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq x, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{(o definitivamente)}$$

allora la serie è convergente.
Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *(o definitivamente), allora la serie è divergente.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un numero $x \in]0,1[$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Facendo variare $k = 1, 2, \dots, n$, otteniamo

$$\frac{a_2}{a_1} \leq x \quad k = 1$$

$$\frac{a_3}{a_2} \leq x \quad k = 2$$

$$\frac{a_4}{a_3} \leq x \quad k = 3$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$\begin{array}{ll} \dots & \dots \\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \le x & k = n-1 \\ \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le x & k = n \end{array}$$

Moltiplicando membro a membro le relazioni precedenti si ottiene

$$\frac{\cancel{a_2}}{a_1} \cdot \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}} \cdot \frac{\cancel{a_4}}{\cancel{a_3}} \cdot \ldots \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_{n-1}}} \cdot \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}} \le x^n$$

ossia

$$a_{n+1} \le a_1 x^n$$

Deduciamo che la serie data $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è maggiorata dalla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_1 x^{n-1}$

Essendo la serie maggiorante convergente, in quanto serie geometrica di ragione $0 < x < 1$, la serie data è convergente.

Se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ allora deduciamo che la successione che ha generato la serie non è decrescente, $a_{n+1} \ge a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, di conseguenza non può essere infinitesima; si tenga conto che essendo non decrescente

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} \ge a_1 > 0$$

□

Teorema 2.8 (Criterio del rapporto sotto forma di limite). *Sia* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini positivi.*

Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} = l < 1$ *allora la serie è convergente.*

Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} = l > 1$ *allora la serie è divergente.*

Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} = 1$ *nulla si può dire sul carattere della serie.*

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella condotta nel caso del criterio della radice in forma di limite. □

Esempio 2.3

Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ (1).

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} =$$

$$2\cancel{(n+1)}\frac{n^n}{(n+1)^n\cancel{(n+1)}} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{2}{e} < 1$$

La serie è convergente.

Esercizio 2.13

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a-1)^n}{n^2+1}$, $a > 1$.

Applichiamo il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(a-1)^{(n+1)}}{(n+1)^2+1} \frac{n^2+1}{(a-1)^n} = \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}(a-1) \xrightarrow{n\to+\infty} (a-1)$$

La serie converge per $a - 1 < 1$ ossia per $1 < a < 2$, la serie diverge per $a - 1 > 1$ ossia per $a > 2$. Per $a = 2$ il criterio utilizzato non da indicazioni. Ricorriamo allora al criterio del confronto.

Per $a = 2$ la serie diviene $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ maggiorata dalla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Pertanto per $a = 2$ la serie converge.

2.3. Il teorema di Cauchy. Il teorema di Cauchy permette di discutere il carattere di una serie generata da una successione di numeri non negativi non crescente utilizzando una opportuna sottosuccessione della stessa.

Teorema 2.9. *Sia (a_n) una successione non crescente di numeri non negativi. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente se e solo se la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$$

è convergente.

Non procediamo alla dimostrazione.

Esempio 2.4

Utilizzando il teorema di Cauchy, dimostriamo che la serie armonica generalizzata è convergente per $\alpha > 1$.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \frac{1}{2^{\alpha k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\alpha k - k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$$

Poichè la serie ottenuta utilizzando il teorema di Cauchy è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ questa risulta convergente, ossia la serie armonica generalizzata è convergente nel caso $\alpha > 1$.

[1] In matematica, se n è un intero positivo, si definisce n fattoriale e si indica con $n!$ il prodotto dei primi n numeri interi positivi. In formule, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Si assume per definizione che 0!=1. La funzione fattoriale può anche essere definita in modo ricorsivo:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Esempio 2.5
Studiare il carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^\alpha}$, con $\alpha > 0$.
Per $0 < \alpha \leq 1$
$$\frac{1}{(\ln n)^\alpha} \geq \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2$$
La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è una serie minorante della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^\alpha}$ essendo $0 < \alpha \leq 1$.
Essendo la serie minorante divergente anche la serie maggiorante è divergente.
Per $\alpha > 1$, per determinare il carattere della serie, ricorriamo al teorema di Cauchy
$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \frac{1}{[\ln(2^n)]^\alpha} = \sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \frac{1}{(n\ln(2))^\alpha} = \frac{1}{(\ln(2))^\alpha} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n^\alpha}, \quad \alpha > 1$$
Essendo il termine generale della serie a cui siamo pervenuti divergente la serie data è divergente.

2.4. Esercizi di riepilogo. Di seguito vengono proposti alcuni esercizi svolti.

Esercizio 2.14
Determinare il carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \sin \frac{1}{n}$. Il termine generale sella serie
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \sin \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 0 \cdot \ln 2 \cdot 1 = 0$$
è infinitesimo. Ma
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \sin \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} \cdot \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \ln 2$$
la serie data ha lo stesso carattere della $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ che è convergente.

Esercizio 2.15
Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\ln n}}$, con $x > 0$.

$$x^{\ln n} = e^{\ln n \cdot \ln x} = \left(e^{\ln n}\right)^{\ln x} = n^{\ln x}$$

La serie data è convergente per $\ln x > 1$ ossia per $x > e$, è divergente per $\ln x \leq 1$ ossia per $0 < x \leq e$.

Esercizio 2.16

Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$.

$$\frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{4^n n!} = 4\frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = 4\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{4}{e} > 1$$

La serie data è divergente per il criterio del rapporto.

Esercizio 2.17

Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$.

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}(2n+1)2\cancel{(n+1)}}^{(2)} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4n+2} \xrightarrow{n\to+\infty} = \frac{e}{+\infty} = 0$$

La serie data è convergente per il criterio del rapporto.

3. Serie con infiniti termini negativi e serie assolutamente convergenti

3.1. Serie a segni alterni e criterio di Leibniz. Le serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ prendono il nome di *serie a segni alterni.*

TEOREMA 3.1 (Criterio di Leibniz). *Sia (a_n) una successione a termini non negativi, non crescente. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ è convergente.*

---

[2]Infatti per le proprietà del fattoriale si ha

$$(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+1)!(2n+2) = (2n)!(2n+1)(2n+2)$$

Esempio 3.1

Studiare la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt[n]{n}-1)$.

È un serie a segni alterni. Per stabilire che è convergente dobbiamo verificare se sono vere le ipotesi del criterio di Leibniz.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}-1=0$

(2) (a_n) è non crescente?

$$\sqrt[n]{n}-1 \geq \sqrt[n+1]{n+1}-1$$

se e solo se

$$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1}$$

eleviamo primo e secondo membro ad $n(n+1)$

$$n^{n+1} \geq (n+1)^n \Rightarrow n^n \cdot n \geq (n+1)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Tenuto conto che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < 3$$

la precedente relazione è verificata $\forall n \geq 3$.
Pertanto la serie è convergente.

3.2. Esercizi svolti. Proponiamo alcuni esercizi svolti.

Esercizio 3.1

Studiare la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)}=0$

(2) $\displaystyle a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n-\ln n} \geq \frac{1}{n+1-\ln(n+1)}$ se e solo se

$$\cancel{n}+1-\ln(n+1) \geq \cancel{n}-\ln n \Rightarrow$$

$$1 \geq \ln(n+1)-\ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \Rightarrow 1 \geq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

è verificata per $\forall n \ \in \mathbb{N}$. Infatti

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1 \Rightarrow 1+\frac{1}{n} \leq e \Rightarrow \frac{1}{n} \leq e-1 \Rightarrow n \geq \frac{1}{e-1}$$

da cui si evince che (a_n) è non crescente.

La serie data è convergente.

Esercizio 3.2

Studiare la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ dove a_n è dato da

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} \quad \text{e} \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$$

(1) la successione a_n è infinitesima essendo infinitesime le successioni a_{2n-1} e a_{2n}

(2) verifichiamo se è vera la seconda ipotesi del criterio di Leibniz. Imponiamo la condizione di non crescenza

$$a_{2n-1} \geq a_{2n} \geq a_{2(n+1)-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)+1}-1}$$

La disequazione di sinistra è vera $\forall n \in \mathbb{N}$, verifichiamo se per $\forall n \in \mathbb{N}$ (o definitivamente) la disequazione di destra è vera.

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \geq \frac{1}{\sqrt{n+2}-1} \Rightarrow$$

$$\sqrt{n+2}-1 \geq \sqrt{n+1}+1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}+2$$

elevando al quadrato primo e secondo membro. Essendo la precedente una relazione tra numeri positivi l'operazione indicata non altera il verso della disuguaglianza

$$n+2 \geq n+1+4+4\sqrt{n+1}$$

ossia $n+2 \geq n+5+4\sqrt{n+1}$, manifestamente falsa. Non possiamo applicare il criterio di Leibniz in quanto la successione (a_n) non è non crescente.

Per stabilire il carattere della serie occorre ricorrere alle somme parziali

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{2+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{2+1}-1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{\sqrt{k+1}}+1-\cancel{\sqrt{k+1}}+1}{(\sqrt{k+1}-1)(\sqrt{k+1}+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Passando al limite per

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

essendo la serie armonica.
Inoltre
$$S_{2n-1} = S_{2n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$$
Ma
$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = +\infty$$
Essendo S_{2n-1} e S_{2n} divergenti a $+\infty$, possiamo affermare che S_n diverge a $+\infty$, per cui la serie data è divergente.

3.3. Serie assolutamente convergenti. Spesso si incontrano serie che presentano infiniti termini positivi ed infiniti termini negativi ma che non presentano la struttura ordinata delle serie a segni alterni. Per stabilire la convergenza di tali serie introduciamo il concetto di *assoluta convergenza.*

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini di segno qualsiasi, consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, ossia la serie avente per elementi i valori assoluti degli elementi della serie data. Dimostriamo che

Teorema 3.2. *Se la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *è convergente* $\Rightarrow$ *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *è convergente.*

Dimostrazione. Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è convergente. Per il criterio generale di convergenza segue che
$$\forall\epsilon > 0\ \exists n(\epsilon) : \forall n > n(\epsilon), \forall p \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon$$
Tenendo conto che, qualunque siano gli interi n e p, sussiste la relazione
$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}|$$
dalla precedente espressione segue che
$$\forall\epsilon > 0\ \exists n(\epsilon) : \forall n > n(\epsilon), \forall p \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$$
ossia la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente. □

Attenzione: il teorema esprime una condizione sufficiente, ossia l'essere la $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente non implica che necessariamente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ sia convergente.

Esempio 3.2

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, ossia la *serie armonica a segni alterni*, sappiamo che tale serie è convergente.
Se consideriamo la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right|$ otteniamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ che sappiamo essere divergente.

Introduciamo la seguente **definizione**:
una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ dei valori assoluti dei suoi termini.
Evidentemente, per quanto detto, una serie assolutamente convergente è convergente.

Ogni serie a termini di segno costante convergente è assolutamente convergente. Si lascia come esercizio di dimostrare che:
"*una qualsiasi combinazione lineare di serie assolutamente convergenti è una serie assolutamente convergente*".

3.4. Criteri di convergenza assoluta. Introduciamo alcuni teoremi che forniscono delle condizioni sufficienti per poter stabilire se una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sia assolutamente convergente.

TEOREMA 3.3 (Criterio del confronto). *Data la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, *sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *una serie assegnata a termini positivi. Se* $\forall n \in \mathbb{N}$ *(o definitivamente)* $|a_n| \geq b_n$ *e se la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge, allora la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *nonè assolutamente convergente.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è una conseguenza immediata del teorema del confronto (2.2) introdotto a proposito delle serie a termini di segno costante. Essendo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ una serie a termini non negativi, per stabilire il carattere si ricorre ai corollari del teorema del confronto già introdotti per le serie a termini di segno costante (2.3). □

Esempio 3.3

Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n} x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n}|x|^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)|x| = |x|$$

Ne segue che la serie data è assolutamente convergente per $|x| < 1$.
Nel caso sia $x = 1$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{\sqrt{n}}} = +\infty$$

Ne segue che la serie non converge per $|x| \geq 1$

Esercizio 3.3

Studiare la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n2^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Vediamo per quali valori di x la serie è assolutamente convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|^n}{n2^n}$, $x \in \mathbb{R}$

Applichiamo il criterio della radice nella forma di limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n2^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{|x|}{2}$$

Imponiamo la condizione di convergenza $\dfrac{|x|}{2} < 1$ ossia $|x| < 2$.
Pertanto per $-2 < x < 2$ la serie dei valori assoluti è convergente, per cui per tali valori la serie data è assolutamente convergente e quindi converge.
Per $x = 2$ la serie data diviene

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

che sappiamo essere convergente.
Per $x = -2$ la serie data diviene

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(-1)^n\frac{\cancel{2^n}}{n\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

che diverge negativamente.

Indice analitico

Indice degli esercizi svolti e degli esempi

Indice