

**Università di Udine
Facoltà di Scienze della Formazione**

Appunti di didattica della matematica

a cura di

Giorgio T. Bagni

**Dipartimento di Matematica e Informatica
Polo Rizzi, Università di Udine**

bagni@dimi.uniud.it

www.syllogismos.it

Udine, 2005

Giorgio T. Bagni Appunti di didattica della matematica

Indice

Introduzione	p. 5
Capitolo 1. La didattica della matematica	p. 7
1.1. Didattica generale e didattica disciplinare	
1.1.1. Che cosa significa <i>didattica</i> ?	
1.1.2. Didattiche disciplinari	
1.2. Didattica della matematica	
1.2.1. Divulgazione delle idee	
1.2.2. Storia e didattica della matematica	
1.2.3. L'epistemologia dell'apprendimento	
<i>Bibliografia del capitolo 1</i>	
Capitolo 2. L'apprendimento della matematica	p. 15
2.1. Apprendere	
2.1.1. Un meccanismo meraviglioso ma complesso	
2.1.2. La trasposizione didattica	
2.2. Il <i>problem solving</i>	
2.2.1. I problemi	
2.2.2. <i>Problem solving</i> e apprendimento	
2.2.3. <i>Problem solving</i> e metacognizione	
<i>Bibliografia del Capitolo 2</i>	

Capitolo 3. Dal concreto all'astratto

p. 25

- 3.1. Matematica e astrazione
 - 3.1.1. Verso l'astrazione
 - 3.1.2. Un esperimento
 - 3.1.3. Problemi e immagini mentali: ancora un'esperienza
- 3.2. Un esempio cruciale: gli insiemi
 - 3.2.1. Rappresentazione e registri semiotici
 - 3.2.2. Rappresentazione di insiemi
 - 3.2.3. Una prima esperienza
 - 3.2.4. Una seconda esperienza
 - 3.2.5. Conclusioni: tra concretezza e astrazione
- 3.3. Apprendimento e artefatti
 - 3.3.1. Un'esperienza interculturale
 - 3.3.2. Il quadro teorico
 - 3.3.3. Matematica cinese e carattere posizionale
 - 3.3.4. Una ricerca sperimentale
 - 3.3.5. Conclusioni

Bibliografia del Capitolo 3

Capitolo 4. Il contratto didattico

p. 55

- 4.1. Contratto e clausole
 - 4.1.1. Un contratto mai firmato
 - 4.2.2. Un risultato per ogni esercizio
 - 4.2.3. La giustificazione formale
- 4.2. L'effetto *Einstellung*
 - 4.2.1. Ripetiamo lo stesso esercizio: ma... serve?

Bibliografia del Capitolo 4

Capitolo 5. Ostacoli e apprendimento

p. 63

- 5.1. Tipi di ostacoli
 - 5.1.1. Ostacoli e fallimenti
 - 5.1.2. Gli ostacoli: una prima classificazione
- 5.2. Ostacoli e linguaggio
 - 5.2.1. Leggibilità
 - 5.2.2. Variabili redazionali
 - 5.2.3. La delicata questione del rigore
 - 5.2.4. Il... “matematiche”
 - 5.2.5. Dimostrare e convincere
 - 5.2.6. Quasi una conclusione...

Bibliografia del Capitolo 5

Bibliografia generale

p. 86

Introduzione

Insegnamento, apprendimento. Da sempre, la trasmissione del patrimonio di cultura, di informazioni, di indicazioni pratiche avviene mediante l'inscindibile abbinamento di questi due atti. L'insegnante invia il messaggio; l'allievo lo riceve, lo fa proprio: apprende.

Questi appunti sono dedicati a tutti coloro i quali sono interessati, per una scelta culturale e (soprattutto) per l'impegno professionale, all'insegnamento e all'apprendimento. In particolare, all'insegnamento e all'apprendimento della matematica.

Si tratta di osservazioni e note che si basano sull'esperienza, su dati sperimentalmente rilevabili, sull'esame di alcuni momenti di attività didattica che hanno visto quotidianamente come protagonisti molti insegnanti entusiasti, che ringrazio di cuore, e i loro allievi, che ricordo con identica simpatia. Non è, invece, un elenco di ricette.

E questo per almeno due ragioni: primo, perché *non* esistono, a giudizio di chi scrive, molte ricette universalmente valide da proporre (da imporre) indiscriminatamente agli insegnanti. Secondo, perché il lavoro dell'insegnante, lo *splendido* lavoro dell'insegnante, non potrà mai essere surrogato da regole fisse, esterne, regolato da manuali onnicomprensivi. Un insegnante è una persona viva, reale, che si trova, giorno dopo giorno, ad operare con altre persone vive e reali, gli allievi; insieme, insegnante e allievi devono "costruire" molte bellissime cose: il loro rapporto è spesso felice e produttivo, talvolta è velato da qualche difficoltà. Può incrinarsi, può rinsaldarsi; e può risorgere. Un rapporto interpersonale non deve essere incanalato in percorsi studiati a tavolino, secondo schemi precostituiti, rigidi: ridurre la complessa e delicata attività dell'insegnante (e dell'allievo) all'applicazione di una fredda fila di precetti significherebbe banalizzarla in modo del tutto inaccettabile.

Insomma: trucchi o toccasana per insegnare (e per apprendere) non ce ne sono; e se anche ce ne fossero, sarebbe inutile sperare di ottenere da essi la chiave per un insegnamento (per un apprendimento) ai limiti della perfezione: servirebbero a poco, forse a nulla.

Ma ciò non significa che l'insegnamento e l'apprendimento possano essere lasciati completamente al caso. Non è più possibile affidare esclusivamente la riuscita del grande, meraviglioso, indispensabile processo di insegnamento e di apprendimento a doti particolari o a meravigliose predisposizioni "naturali": Tizio "sa insegnare", Caio "capisce al volo la matematica". Sì, forse Tizio e

Caio avranno elevate possibilità di diventare, rispettivamente, un ottimo insegnante e un ottimo studente (beati loro!); ma sono sempre sufficienti tali fortunate predisposizioni per ottenere sicuramente un buon risultato educativo? Assolutamente no. Inoltre: e... tutti gli altri, ovvero tutti coloro i quali non avrebbero avuto in dote le sullodate predisposizioni? Devono irrimediabilmente rinunciare ad essere dei buoni insegnanti, dei brillanti studenti?

L'insegnamento e l'apprendimento della matematica non sono, come vedremo, il prodotto di un'attività "artistica", ma razionale. L'insegnante e l'allievo possono (devono) riflettere continuamente sul proprio operato, per rendersi conto delle eventuali difficoltà, per capirne le radici e dunque per migliorare la situazione. Per rendere sempre più vivo ed efficace l'inseparabile binomio insegnamento-apprendimento.

Scopo di queste note, allora, è la messa a punto di riflessioni su alcune questioni fondamentali della didattica della matematica. I primi capitoli saranno dedicati all'introduzione di alcuni concetti basilari, alla precisazione dei principali problemi: in essi cercheremo insomma di delineare, almeno a grandi linee, quella che potremo chiamare l'epistemologia dell'apprendimento. Quindi la trattazione si farà sempre più specifica e dettagliata ed affronterà direttamente alcuni problemi particolari.

Capitolo 1

La didattica della matematica

1.1. DIDATTICA GENERALE E DIDATTICA DISCIPLINARE

1.1.1. Che cosa significa *didattica*?

Il nostro viaggio nella didattica della matematica richiede innanzitutto la precisazione di alcuni concetti generali. Intendiamoci: queste note non ricalcano un manuale teorico; ma la conoscenza precisa delle nozioni di base e di un'appropriata terminologia è indispensabile per creare un primo terreno d'intesa, per determinare una base culturale comune sulla quale sviluppare le nostre considerazioni¹.

Spesso, ad esempio, riuniamo nel termine *didattica* tutto ciò che riguarda la vita scolastica: le caratteristiche dell'insegnamento, i libri di testo, gli altri sussidi, le reazioni dei nostri allievi, le tecniche di valutazione etc.: tutto sembra far parte della *didattica* (sostantivo); ad ogni scelta che ha a che fare con la scuola, ad ogni attività svolta in ambito scolastico, ad ogni oggetto impiegato a scuola attribuiamo senz'altro l'aggettivo *didattico*. Forse, prima di iniziare un lungo e (a tratti) impegnativo percorso che si snoderà tra l'insegnamento e l'apprendimento, sarà necessario approfondire adeguatamente il significato di questo benedetto termine, *didattica*, così diffuso e dal senso non sempre altrettanto chiaro e delimitato (Pellerey, 1991).

Non daremo, tuttavia, una definizione di didattica. O, meglio, non daremo di tale parola la tradizionale definizione "da vocabolario": ciò perché le accezioni, le sfumature ad essa connesse sono tali e tante che qualsiasi definizione rischierebbe di essere limitativa e, dunque, gravemente scorretta. Illustreremo invece il significato, la portata del termine *didattica* mediante la presentazione di alcune tra le principali questioni ad esso collegate².

¹ L'uso della prima persona plurale, in tutte le parti delle presenti dispense, non si riferisce ad un *pluralis maiestatis*, così caro a chi scrive libri "importanti", ma ad un *pluralis auctoris*: ritengo cioè che la grande maggioranza delle considerazioni che esporrò nel testo sia da considerare condivisa (o, almeno, condivisibile), tra l'autore e il lettore. Il viaggio attraverso la didattica della matematica che desidero proporre ai miei lettori è, insomma, un viaggio... comune.

² Ai lettori più interessati consigliamo di leggere attentamente le pagine 89-99 di *Didattica generale e didattiche disciplinari* di B. D'Amore e di F. Frabboni (1996).

Affronteremo innanzitutto un importante argomento, che può essere sintetizzato nella domanda seguente: se è vero che il termine *didattica* si riferisce primariamente all'insegnamento, ha senso lo studio e la presentazione di una "didattica in generale", o sarebbe necessario fare esplicito riferimento alla didattica specifica, alla didattica della materia che si insegna? Ci sono, insomma, regole, indicazioni, problemi, soluzioni comuni (valide per l'apprendimento di ogni materia, dunque per ogni insegnante), oppure le varie situazioni, le varie discipline necessitano di un approccio particolare (per cui si dovrà parlare di: didattica della matematica, didattica della lingua italiana, didattica delle scienze etc.)?

1.1.2. Didattiche disciplinari

La questione ora segnalata è attualmente dibattuta (ci riferiremo spesso, in questo capitolo, a: D'Amore & Frabboni, 1996, pp. 118-124 e a D'Amore, 1999). Addirittura, si vengono a determinare due posizioni radicali, opposte: da un lato si potrebbe infatti sostenere che esiste *soltanto* una didattica generale, la quale si occupa dei meccanismi dell'apprendimento; le didattiche specifiche, le didattiche disciplinari altro non sono che le applicazioni della didattica generale ai singoli casi concreti. Dall'altro lato, si potrebbe sostenere che la didattica generale, in sé, è inconcepibile: si insegna *qualcosa* e dunque la didattica non può che essere la didattica di *qualcosa*. Altrimenti si rischia di condurre ragionamenti talmente privi di un qualsiasi aggancio con il concreto da risultare sterili.

Per quanto riguarda la contrapposizione ora ricordata, concordiamo con B. D'Amore, che scrive:

«Anzitutto, sembrano esserci problemi di linguaggio, quanto meno di terminologia. "Didattica" può essere inteso come "Teoria della didattica" desunta dalla pragmatica osservata e dai risultati ottenuti. "Didattica" può altresì essere inteso in senso più filosofico e teoretico. "Didattica" può essere poi inteso come qualche cosa di molto più specifico. Di fatto, però, è ovvio che dobbiamo accettare l'evidenza: vi sono problematiche per così dire "a monte" delle didattiche specifiche, che non dipendono [in nota l'Autore riporta: «Forse»] dalle singole discipline... Teorizzando (o generalizzando) queste problematiche, si crea una teoria della didattica che non dipende più esplicitamente o direttamente dalle discipline» (D'Amore & Frabboni, 1996, p. 119).

Dunque: esistono le didattiche specifiche (disciplinari) ed esiste la didattica generale. Si tratta di due approcci diversi al problema, o forse di due fasi

successive: le azioni, le scelte, le posizioni assunte dall'insegnante, così come l'apprendimento da parte dell'allievo, sono certamente riferite alla disciplina insegnata (e appresa); pertanto l'attività didattica e la corrispondente ricerca non possono eludere il riferimento alla materia. Tuttavia le singole didattiche specifiche non procedono separatamente, sulla base di valutazioni, riferimenti e considerazioni completamente indipendenti: esistono questioni che, pur sorgendo da situazioni proprie della singola disciplina, sono generalizzabili e la cui importanza, una volta operata tale generalizzazione, è comune³.

Ad esempio, nelle nostre spiegazioni di argomenti di matematica utilizziamo spesso delle figure, dei diagrammi; ma anche nelle spiegazioni relative ad argomenti di *altre* materie si ricorre alla visualizzazione. Possiamo dunque affrontare il problema *visualizzazione* sulla base di considerazioni relative alla didattica della matematica⁴; possiamo però anche farlo con riferimento ad altre didattiche disciplinari. Tali approcci, ovviamente, non sono del tutto indipendenti; molte questioni possono essere (e in effetti sono) comuni: qual è, in generale, l'atteggiamento dell'allievo rispetto ai diversi registri rappresentativi (tra i quali la visualizzazione)? Come agevolare il passaggio da un registro all'altro? Perché, talvolta, la visualizzazione viene accettata quasi con entusiasmo mentre in altre occasioni viene addirittura "guardata con sospetto"? A queste domande possiamo rispondere riferendoci esclusivamente alla nostra materia, magari alla nostra esperienza diretta; ma possiamo anche trattare la questione in termini più vasti, con riferimento alle realtà, ai meccanismi che regolano l'apprendimento in generale.

Spesso, quindi, nel corso di questi appunti, parleremo di didattica della matematica pensando a una didattica specifica; con ciò però non intenderemo negare la piena validità di considerazioni riferite ad una didattica generale, l'importanza di elaborazioni teoriche comuni alle varie discipline.

1.2. DIDATTICA DELLA MATEMATICA

1.2.1. Divulgazione delle idee

Le considerazioni alle quali sarà dedicata la presente sezione potrebbero essere riferite sia alla didattica generale sia alla didattica della matematica. Come

³ Si vedano inoltre le considerazioni epistemologiche e le note riguardanti la formazione espresse in: D'Amore & Frabboni, 1996, pp. 120-124.

⁴ Torneremo ampiamente a trattare alcune questioni collegate alla visualizzazione nel corso del presente lavoro.

sopra anticipato, considerata l'impostazione di questi appunti, verrà spesso privilegiato il riferimento alla didattica specifica.

Che cos'è, dunque, la didattica della matematica? Come possiamo intendere lo studio, la ricerca in didattica della matematica?

Iniziamo a presentare una prima concezione della didattica della matematica, secondo la quale lo scopo centrale dell'azione e della ricerca didattica è il miglioramento dell'insegnamento. La logica sottintesa a tale interpretazione è evidente:

ad un miglioramento del nostro insegnamento farà inevitabilmente riscontro un miglioramento dei risultati che potremo ottenere dai nostri allievi.

La concezione della didattica della matematica come *divulgazione delle idee* ha portato a risultati importanti (la denominazione è tratta ancora da: D'Amore & Frabboni, 1996; si vedano in particolare le pp. 90-97). Molti ricercatori, seguendo questa impostazione, hanno brillantemente indicato agli insegnanti concrete possibilità di migliorare significativamente l'insegnamento attraverso sussidi innovativi, accorgimenti, attività. Ad esempio, la possibilità di presentare la matematica ai nostri allievi anche mediante riferimenti alla storia della nostra disciplina va inquadrata in questo tipo di impostazione della didattica⁵.

1.2.2. Storia e didattica della matematica

L'impostazione didattica sopra presentata, la didattica come divulgazione delle idee, richiede un approfondimento. Un suo esame più profondo, come vedremo, porta alla considerazione di alcuni suoi limiti, che cercheremo di illustrare brevemente.

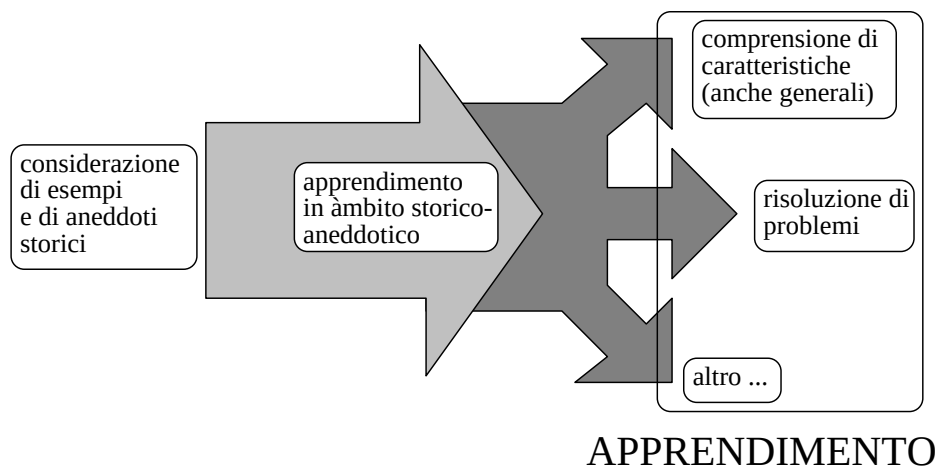
Consideriamo ad esempio l'introduzione (simpatica, elegante) di contenuti elementari mediante citazioni di storia della matematica. Illustrando un momento storico *supponiamo che la reazione del nostro allievo sia stata proprio tale da portarlo ad alcune reazioni.*

Ma il problema, in generale, è questo: utilizzando forme di didattica riconducibili alla divulgazione delle idee, come sappiamo, noi agiamo sull'insegnamento. Bene. Ma il guaio è che non possiamo essere certi, *a priori*, dell'effetto che il nostro (rinnovato, migliorato) insegnamento potrà avere sull'allievo; non possiamo sapere con sicurezza che certe sollecitazioni

⁵ Segnaliamo alcuni testi teorici: Weil, 1980; Swetz, 1989 e 1995; Pepe, 1990; Fauvel, 1990 e 1991; Fauvel & van Maanen, 1997. Furinghetti & Somaglia, 1997. Esempi interessanti sono in: Carruccio, 1972; D'Amore & Speranza, 1989, 1992 e 1995.

porteranno a ben determinate (ed auspicabili) reazioni nella mente dell'allievo, che sono plausibili, ma non obbligatorie. Perciò la sottintesa equazione: “migliore insegnamento” uguale (sempre!) a “migliore apprendimento” è, purtroppo, tutt'altro che scontata.

Le “reazioni” alle quali abbiamo accennato devono essere ulteriormente precisate (D'Amore & Frabboni, 1996, pp. 97-98). In termini estremamente semplificativi, le cose stanno così: agendo secondo l'impostazione didattica ora considerata, abbiamo proposto all'allievo alcune sollecitazioni, in un ambito che potremmo indicare, nell'esempio specifico, come “storico-aneddotico”. Diamo per accettato che, *in quest'ambito*, il nostro studente “apprenda”. Ma la conoscenza così acquisita non può restare confinata solamente nell'ambito storico-aneddotico: ciò sarebbe ben poco utile; è invece necessario che essa si “trasferisca” ad ambiti diversi, che essa possa essere utilizzata dallo studente per la risoluzione di problemi, per la corretta interpretazione di altri esempi, per l'apprendimento di ulteriori contenuti matematici inerenti all'argomento in questione. È necessario cioè che avvenga quello che viene denominato *transfer cognitivo*.



Ebbene, il problema principale che potenzialmente limita l'efficacia delle didattiche della matematica intesa come divulgazione delle idee è questo: *operando esclusivamente sull'insegnamento non possiamo essere certi che avvenga (effettivamente e completamente) il transfer cognitivo*.

Ribadiamo che questo breve excursus deve essere considerato introduttivo. Non pretendiamo, in questa sede, di proporre una trattazione specialistica sul *transfer cognitivo* (rimandiamo il lettore interessato a studi specifici; ad esempio: Feldman & Toulmin, 1976). Ma la presenza del problema citato ha una netta influenza sulla scelta dell'impostazione della nostra ricerca didattica.

Pur senza trascurare la validità delle ricerche di questo tipo, collegate dunque alla divulgazione delle idee⁶, ci porteremo dunque verso un'altra impostazione della didattica della matematica.

1.2.3. L'epistemologia dell'apprendimento

Abbiamo rilevato che il limite della didattica della matematica intesa come divulgazione delle idee consiste nell'incertezza che permane a proposito degli effetti (sull'apprendimento) di certe scelte che noi insegnanti operiamo (con riferimento al nostro insegnamento).

Come ovviare a tale situazione?

È necessario intervenire sulla struttura e sugli scopi della ricerca didattica, inserendo una fase di *verifica empirica* che possa rendere evidenti gli effetti sull'apprendimento delle scelte dell'insegnante. La presenza di questo aspetto sperimentale modifica nettamente la nostra ricerca e conferisce ad essa un particolare statuto epistemologico (per approfondire questo punto si veda ancora: Feldman & Toulmin, 1975; D'Amore & Frabboni, 1996 e soprattutto: D'Amore 1999).

Chiameremo tale impostazione *epistemologia dell'apprendimento*.

Nella ricerca didattica (e in particolare in didattica della matematica) impostata secondo l'epistemologia dell'apprendimento sono presenti diversi tipi di tecniche per il rilevamento del dato sperimentale: ad esempio, vengono proposti dei test agli allievi, ed i risultati di tali test vengono interpretati anche sulla base di interviste, nelle quali gli allievi sono invitati ad illustrare e a motivare le proprie scelte⁷. Tutto ciò consente di giungere a conoscere più da vicino e meglio le reazioni dell'allievo, dunque l'effetto che le nostre scelte effettivamente comportano sull'apprendimento.

Le ricerche alle quali faremo riferimento in questi appunti (ad esempio quelle che presenteremo e analizzeremo nel capitolo 3) sono tutte di questo secondo tipo.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO 1

Abraham, A. (1984), *L'enseignant est une personne*, EST, Paris.

⁶ Alcune delle quali, non lo si dimentichi, sono della massima importanza; si veda, per una presentazione storica ed epistemologica: Pescarini, 1995.

⁷ Si veda inoltre: D'Amore, 1991.

- Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.
- Bara, B. (1990), *Scienza cognitiva*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Brunschvicg, L. (1929) *Les étapes de la Philosophie Mathématique*, Paris.
- Bunge, M. (1985), *Epistemologia*, Ariel, Barcelona.
- Caroni, V. & Iori, V. (1989), *Asimmetria nel rapporto educativo*, Armando, Roma.
- Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.
- D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1976), *Gli interessi matematici*, Marsilio, Venezia.
- D'Amore, B. & Speranza, F. (a cura di) (1989), *Lo sviluppo storico della matematica*, I, Armando, Roma.
- D'Amore, B. (1991), Ricerca-azione, possibile paradigma della ricerca in didattica: *La scuola se*, 79-80, 14-17.
- D'Amore, B. & Speranza, F. (a cura di) (1992), *Lo sviluppo storico della matematica*, II, Armando, Roma.
- D'Amore, B. & Speranza, F. (a cura di) (1995), *La matematica e la sua storia*, Angeli, Milano.
- D'Amore, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.
- D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.
- D'Amore, B. (1999), *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna.
- Dienes, Z. (1963), *An experimental study of mathematics-learning*, Hutchinson, New York.
- Duncker, K. (1969), *La psicologia del pensiero produttivo*, Giunti-Barbèra, Firenze (edizione originale: 1935).
- Enriques F. & de Santillana, G. (1936), *Compendio di storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1973).
- Fauvel, J. (1990), History in the mathematical classroom: *The IREM papers*, The Mathematical Association.
- Fauvel, J. (1991), *For the learning of mathematics* (numero speciale sull'impiego della storia della matematica nell'insegnamento), 11, 2.
- Fauvel, J. & van Maanen, J. (1997), Storia e didattica della matematica: *Lettera Pristem*, 23, 8-13.
- Feldman, C.F. & Toulmin, S. (1976), Logic and the theory of mind: Cole, J. K. (a cura di), *Nebraska symposium on motivation 1975*, University of Nebraska Press, Lincoln, London.
- Fischbein, E. & Vergnaud, G. (1992), *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, D'Amore, B. (a cura di), Pitagora, Bologna.

- Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an educational task*, Riedel, Dodrecht.
- Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della matematica in classe, *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1.
- Gagné, R.M. (1973), *Le condizioni dell'apprendimento*, Armando, Roma (prima edizione: 1970).
- Kleinmuntz, B. (1976), *Problem solving. Ricerche, modelli, teoria*, Armando, Roma.
- Meirieu, P. (1987), *Apprendre... oui, mais comment?*, ESF, Paris.
- Nesher, P. & Kilpatrick, J. (a cura di) (1990), *Cognition and mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Pellerey, M. (1991), La ricerca in didattica della matematica: *Atti del Convegno "Processi cognitivi e problemi della ricerca didattica disciplinare"*, Milano.
- Pepe, L. (1990), Storia e didattica della matematica: *L'educazione matematica*, III, I, 2, 23-33.
- Pescarini, A. (1995), Dinamiche dell'educazione matematica, *Bollettino degli insegnanti di matematica del Canton Ticino*, 30, 1-18.
- Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, I-II, Feltrinelli, Milano.
- Priore, F. (1990), *Modelli, strumenti e misure nella didattica contemporanea*, Mursia, Milano.
- Resnick, L.B. & Ford, W.W. (1991), *Psicologia della matematica ed apprendimento scolastico*, Sei, Torino (prima edizione: 1981).
- Swetz, F.J. (1989), Using problems from the history of mathematics in classroom instruction: *Mathematics teacher*, 82, 370-377.
- Swetz, F.J. (1995), To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context: *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88.
- Vigotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1978).
- Weil, A. (1980), History of mathematics: why and how: Letho, O. (a cura di), *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, Helsinki 1978, I, 227-236.
- Wertheimer, H. (1959), *Productive Thinking*, Harper & Row, New York.

Capitolo 2

L'apprendimento della matematica

2.1. APPRENDERE

2.1.1. Un meccanismo meraviglioso ma complesso

Se riuscissimo a compilare una teoria onnicomprensiva, sperimentalmente verificata, perfetta dell'apprendimento risolveremmo immediatamente molti (o tutti) i problemi della didattica: l'apprendimento è infatti il fine ultimo della didattica, è la meta nella quale si concentrano e si riassumono gli sforzi, le riflessioni, le ricerche in questo campo.

In realtà, l'apprendimento è un fenomeno complesso che coinvolge aspetti propri di diverse scienze (oltre alla disciplina insegnata e, auspicabilmente, appresa, non dimentichiamo la pedagogia, la psicologia, la filosofia etc.). In ciascun ambito scientifico, poi, moltissime sono le impostazioni, le correnti, le scuole di pensiero e risulta quindi quasi impossibile riuscire a fondere questa enorme massa di ricerche, di dati, di possibili interpretazioni in una teoria unitaria, semplice ed efficace. Noi, chiaramente, non ci cimenteremo in questo titanico intento.

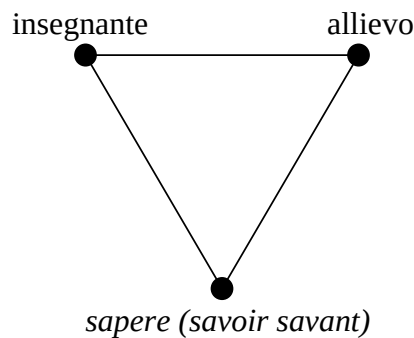
Del resto, i presenti appunti non vogliono costituire un manuale specialistico di didattica generale; né pretendono di fornire un esaustivo panorama delle ricerche in didattica disciplinare (con riferimento, dunque, alla matematica). Ci limiteremo a fornire al lettore qualche spunto per la comprensione di alcuni fenomeni¹.

Una riflessione sul ruolo dell'apprendimento e dell'insegnamento ci sembra innanzitutto opportuna, anzi, necessaria. Nel delicato fondersi di questi due processi sono coinvolti l'insegnante, l'allievo e l'oggetto dell'insegnamento (la materia insegnata, i contenuti).

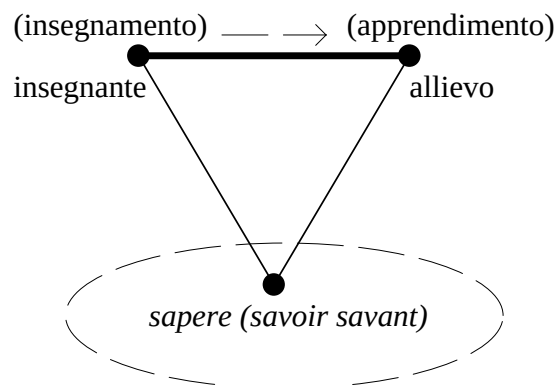
A tale proposito, iniziamo a presentare un celebre diagramma, dovuto a Y. Chevallard. Egli suggerisce la seguente (e, come vedremo, molto utile) schematizzazione dell'attività didattica²:

¹ Scusandoci anticipatamente se alcune osservazioni potranno sembrare a qualcuno scontate o banali. È un rischio impossibile da evitare!

² Il lettore potrà ad esempio vedere: Chevallard & Joshua, 1982; Chevallard, 1985; D'Amore & Frabboni, 1996, p. 111.



Il triangolo di Chevallard deve essere adeguatamente interpretato: ai suoi vertici troviamo l'insegnante, l'allievo e il "sapere". Ma attenzione: il termine "sapere" è davvero troppo generico e può, per questo motivo, trarre in inganno. Si tratta, infatti, di quello che lo studioso francese chiama *savoir savant*, ovvero il sapere accademico, quello (elevato, innovativo, in continua elaborazione) che nasce dalla ricerca. Ed è un sapere collocato (anche visivamente, nello schema proposto) al di fuori del rapporto diretto insegnante-allievo: un sapere, quindi, sostanzialmente (pericolosamente) esterno ai fenomeni di insegnamento e di apprendimento, e perciò, nella sua forma originale, inutilizzabile per una proficua didattica.

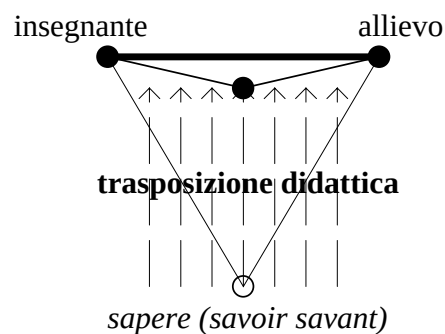


2.1.2. La trasposizione didattica

Il problema è semplice: se le cose stanno come esse vengono visualizzate in questa figura, senz'altro c'è qualcosa che non funziona; il "sapere" resta infatti del tutto estraneo alla didattica e ciò è inaccettabile. Si tratta allora di operare:

- o sulle caratteristiche del nostro insegnamento, in modo da farlo “passare” per il punto in cui abbiamo supposto essere “concentrato” il sapere (ma contemporaneamente richiedere un analogo adattamento all’apprendimento dei nostri allievi, cosa non sempre facile da ottenere);
- o su questo imponente *savoir savant*, per ottenere un suo adattamento ai processi di insegnamento e (soprattutto) di apprendimento.

Evidentemente la soluzione migliore (per meglio dire: l’unica soluzione praticabile con speranze di successo!) è la seconda: non è pensabile che un allievo possa “digerire” contenuti (ad esempio) matematici direttamente espressi in forma accademica, senza che essi siano adeguatamente plasmati, resi accessibili. È stato coniato un termine specifico per indicare questa indispensabile operazione di preventivo adattamento del *savoir savant* alle caratteristiche del dialogo educativo che avviene, in aula, tra l’insegnante e l’allievo: *trasposizione didattica*.



Uno dei compiti che ciascun insegnante deve quotidianamente affrontare per rendere possibile l’apprendimento, dunque, si identifica nella efficace e corretta trasposizione didattica del *savoir savant* relativo alla propria disciplina³.

³ Anche in questo caso è stato coniato un termine apposito, *noosfera*; con esso si indica «il luogo dei dibattiti di idee significative sull’insegnamento, le finalità della scuola, gli scopi della formazione, le attese della società per quanto attiene scuola e cultura (per esempio i programmi ministeriali); la noosfera è l’intermediario tra il sistema scolastico (e le scelte dell’insegnante) e l’ambiente sociale più esteso (esterno alla scuola)» (D’Amore & Frabboni, 1996, p. 111, in cui viene citato: Chevallard & Joshua, 1982).

2.2. IL *PROBLEM SOLVING*

2.2.1. I problemi

Molto spesso, nel corso della nostra attività didattica, abbiamo fatto (facciamo e continueremo a fare) riferimento a *problemi*. Quotidianamente noi ed i nostri allievi abbiamo a che fare con dei problemi: durante le spiegazioni, nelle esercitazioni, nelle prove di valutazione etc. Forse può essere interessante soffermarsi un po' su questo "oggetto" didattico così diffuso e chiedersi: che cos'è, dunque, un *problema*? Che cosa significa *risolvere un problema*?

Una bella risposta è data da una frase di G. Polya, che è opportuno riportare integralmente:

«Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano» (Polya, 1983).

Non c'è forse studioso della didattica della matematica che non si sia impegnato nella ricerca sulla risoluzione dei problemi; ed anche in questo caso, ciò avviene con riferimento a tutti i livelli scolastici⁴.

Un'espressione, in particolare, compare in moltissimi studi (recenti e non): *problem solving*.

L'attività di risoluzione di problemi è di fondamentale importanza nella didattica della matematica (e lo ripetiamo ancora: ciò vale in tutti i livelli scolastici). Invece essa, talvolta, viene relegata al ruolo di un tradizionale procedimento di verifica, ad occasione di valutazione: in ogni compito in classe c'è "il problema"... Ma la risoluzione di problemi, secondo molti studiosi, è molto di più: il suo corretto impiego la eleva al livello di una tecnica didattica straordinariamente efficace.

⁴ Indichiamo una (forzatamente incompleta!) rassegna di citazioni: Duncker, 1945 e 1969; Wertheimer, 1959; Polya, 1963, 1971 e 1983; Aebli, 1965; Luchins & Luchins, 1970; Newell & Simon, 1972; Gagné, 1973; Mosconi & D'Urso, 1973; Glaeser, 1976; Kleinmuntz, 1976; Burton, Mason & Stacey, 1982; Lester & Garofalo, 1982; Lester, 1983; Borasi, 1984 e 1986; Schoenfeld, 1985 e 1987; Boero & Ferrari, 1988; Brown & Walter, 1988; Boero, 1990; Cofman, 1990; D'Amore, 1993. Per un'antologia di risposte alla domanda "Che cos'è un problema?" si veda: Ferri, 1989.

2.2.2. *Problem solving* e apprendimento

Per comprendere l'importanza del *problem solving* in una moderna didattica della matematica dovremo presentare brevemente alcuni elementi classici della teoria della didattica (faremo riferimento a: Vigotskij, 1987; D'Amore, 1993).

Nella valutazione dei livelli dello sviluppo mentale dei un allievo è possibile distinguere tra:

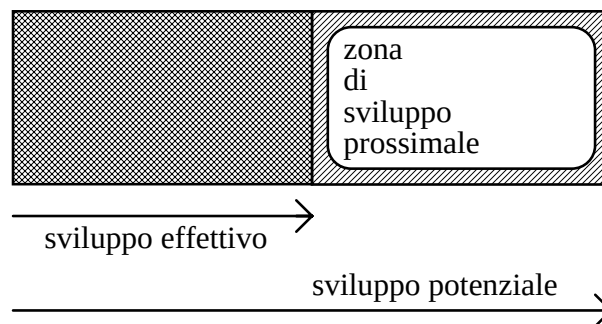
- Livello di *sviluppo effettivo*: con tale termine indicheremo il livello di sviluppo delle funzioni mentali ottenuto da cicli evolutivi già completati.
- Livello di *sviluppo potenziale*: è il livello di sviluppo che potrà essere raggiunto in un futuro più o meno prossimo, evidenziabile dalla proposta di un problema che, pur superando il livello di sviluppo effettivo, può però essere affrontato con un aiuto esterno (ad esempio il suggerimento dell'insegnante).

Dunque, oltre al livello di sviluppo effettivo c'è una zona, ancora non "posseduta" dall'allievo, il cui controllo non è però del tutto impossibile, del tutto irraggiungibile: un problema concepito nell'ambito di questa zona, entro il livello che denominiamo di sviluppo prossimale, può essere affrontato (a volte con successo) grazie ad una... piccola spinta. La nostra esperienza scolastica ci conferma che è talora sufficiente un'indicazione, un suggerimento per "mettere in moto" alcuni allievi di fronte a problemi che, inizialmente, sembrano provocare un vero e proprio blocco nell'allievo, una situazione di incapacità ad impostare la risoluzione⁵.

Proprio in questo si evidenzia il ruolo del *problem solving*. Esso ha dunque un campo d'azione ben definito, che chiamiamo *zona di sviluppo prossimale*. Secondo L.S. Vygotskij, la zona di sviluppo prossimale «è la distanza tra il livello di sviluppo così com'è determinato dal *problem solving* autonomo e il livello di sviluppo potenziale così com'è determinato attraverso il *problem solving* sotto la guida di un adulto o in collaborazione con i propri pari più capaci» (Vigotskij, 1987).

Possiamo dunque riassumere la situazione nella figura seguente:

⁵ Blocco, è importante notarlo, non causato da questioni di emotività o da condizioni esterne (Gagné, 1973), ma riferibile alla difficoltà, alla portata del problema stesso. Per quanto riguarda invece il *tempo di latenza*, ovvero quell'intervallo di tempo (più o meno lungo) che, inevitabilmente, divide la formulazione della domanda dal momento in cui viene data la risposta, indichiamo: D'Amore, 1993, pp. 103-108.



Eccoci dunque ad una conclusione molto importante: *il problem solving genera apprendimento*.

Grazie a delle attività di *problem solving*, infatti, l'allievo può superare significativamente il livello di sviluppo effettivo per addentrarsi nella zona di sviluppo prossimale: quindi, debitamente consolidato, questo processo porta ad innalzare il livello di sviluppo effettivo.

2.2.3. *Problem solving* e metacognizione

Prima di lasciare il *problem solving* (argomento che ricordiamo essere vastissimo, che potrà dunque essere approfondito dal lettore sulla base delle indicazioni bibliografiche fornite), riteniamo importante accennare a quel vasto insieme di attività, di riflessioni che va sotto il nome di *metacognizione* (Flavell, 1979).

La risoluzione di un problema (nonché i tentativi, anche parziali o errati di risoluzione) si basa su attività intuitive e tali attività non sempre possono essere chiare, razionalmente motivate, sia per l'insegnante che per l'allievo. Una fase di notevole importanza è proprio quella in cui l'allievo viene portato a riflettere sulle proprie intuizioni e dunque sulle caratteristiche della propria risoluzione del problema proposto: la metacognizione può allora qui identificarsi con la *metarisoluzione* (intendendo, con tale termine, una riflessione, autonoma o guidata, su come si è risolto, completamente o parzialmente, un problema: Wittman, 1981).

Le attività metacognitive sono fondamentali sia per dare corpo all'attività didattica (a quella, cioè, che si svolge in aula e che ha per meta direttamente l'apprendimento), sia nell'ambito della ricerca in didattica della matematica. Grazie alla metacognizione è possibile, ad esempio, indagare sulle scelte

operate dall'allievo, sulle loro motivazioni, sui tentativi solo immaginati e magari non effettivamente attuati⁶.

Alcune strategie metacognitive, secondo M. Pellerey (1990 e 1991a), si basano sulla considerazione (e sul potenziamento) delle seguenti capacità (D'Amore, 1993, pp. 198-199 e 1999):

- Capacità di inquadrare preliminarmente quanto necessario per la risoluzione del problema (esigenze di tempo, di materiali etc.).
- Capacità di pianificare l'attività risolutiva.
- Capacità di monitoraggio (riflettere sul proprio comportamento, essere eventualmente in grado di modificarlo).
- Capacità di valutazione del lavoro svolto (sia con riferimento a risultati parziali che con riferimento alla conclusione).

Lasciamo al lettore il compito di immaginare caratteristiche e modalità delle attività metacognitive che possono essere svolte in aula.

Ma certamente limitare la risoluzione di un problema ad una semplice, arida, sequenza di formule e di operazioni che culminano con il "risultato giusto" significa rinunciare a molte importanti (e feconde) possibilità didattiche collegate alla metacognizione.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO 2

- Aebli, H. (1965), *I principi fondamentali dell'insegnamento*, Giunti-Barbèra, Firenze (edizione originale: 1961; riedizione: 1985).
- Apostol, T.M. (1977), *Calcolo*, I, Boringhieri, Torino.
- Bacciotti, A. & Beccari, G. (1988), Problemi didattici nei corsi universitari: l'introduzione del concetto di funzione: *Archimede*, XL, 41-49.
- Ballanti, G. (1991), *Modelli di apprendimento e schemi di insegnamento*, Giunti e Lisciani, Teramo.
- Bara, B. (1990), *Scienza cognitiva*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Barth, B.-M. (1990), *L'apprendimento dell'astrazione*, La Scuola, Brescia (prima edizione: Paris, 1987).
- Boero, P. & Ferrari, P.L. (1988), Rassegna di alcune ricerche sul "problema dei problemi": loro importanza per l'insegnamento: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 7/8, 11, 659-684.

⁶ L'attività metacognitiva rende possibile un'utilissima (essenziale!) rivisitazione delle strategie risolutive messe in atto dagli allievi per risolvere il problema proposto.

- Boero, P. (1990), I problemi, AA.VV., *Guida alle videocassette-Matematica*, Irrsae Liguria, Genova.
- Borasi, R. (1984), Che cos'è un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulle sue implicazioni in didattica della matematica: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 2, 7, 83-98.
- Borasi, R. (1986), On the nature of problems: *Educational Studies in Mathematics*, 17, 125-141.
- Boscolo, P. (1986), *Psicologia dell'apprendimento scolastico. Gli aspetti cognitivi*, UTET, Torino.
- Bourbaki, N. (1966), *Eléments de mathématiques*, I, *Théorie des Ensembles*, Chapitre II, Hermann, Paris.
- Brown, S.I. & Walter, M.I. (1988), *L'arte del problem posing*, Sei, Torino.
- Burton, L.; Mason, J. & Stacey, K. (1982), *Thinking mathematically*, Addison-Wesley, London.
- Chevallard, Y. & Joshua, M.-A. (1982), Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance: *Recherches en didactique des mathématiques*, 3, 1, 159-239.
- Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Cofman, J. (1990), *What to solve?*, Oxford University Press, Oxford.
- D'Amore, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.
- D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.
- De La Garanderie, A. (1980), *Les profils pédagogiques*, Le Centurion, Paris.
- Duncker, K. (1945), On problem solving: *Psychological monographs*, 58, 1-112.
- Duncker, K. (1969), *La psicologia del pensiero produttivo*, Giunti-Barbera, Firenze (prima edizione: 1935).
- Duval, R. (1997), La compréhension des énoncés de problème de mathématisation: de la lecture à la résolution: D'Amore, B. & Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 25-46, Thessaloniki.
- Ferri, F. (a cura di) (1989), *Apprendimento per problemi in matematica nella scuola elementare*, R.T. 14, NRD di Modena e Comune di Modena.
- Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Riedel, Dordrecht.
- Fischbein, E. & Vergnaud, G. (1992), *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, D'Amore, B. (a cura di), Pitagora, Bologna.
- Flavell, J.S. (1979), Metacognition and cognitive monitoring: a new area of cognitive-development inquiry, *American psychologist*, 34, 906-911.
- Gagné, R.M. (1973), *Le condizioni dell'apprendimento*, Armando, Roma (prima edizione: 1970).

- Giordan, A. & De Vecchi, G. (1987), *Les origines du savoir*, Delachaux et Niestlé, Genève.
- Giusti, E. (1983), *Analisi Matematica 1*, Boringhieri, Torino.
- Glaeser, G. (1976), Heuristique générale: estimation de la difficulté d'un problème: AA.VV., *La Problématique et l'Enseignement de la Mathématique*, Ciaem, Louvain-la-Neuve, 33-47.
- Greeno, J.G. (1978), A study of problem solving: Glaser, R. (a cura di), *Advances in instructional psychology*, I, Erlbaum, Hillsdale.
- Johnson-Laird, P.N. (1988), *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna (prima edizione originale: 1983).
- Johnson-Laird, P.N. & Byrne, R.M.J. (1990), *Deduction*, Erlbaum, Hillsdale.
- Kahneman, D.; Slovic, P. & Tversky, A. (1982), *Judgement under uncertainty, heuristic and biases*, Cambridge University Press, New York.
- Kleinmuntz, B. (1976), *Problem solving. Ricerche, modelli, teoria*, Armando, Roma.
- Kosslyn, S.M. (1989), *Le immagini della mente*, Giunti, Firenze 1989 (prima edizione originale: 1983).
- Lester, F. & Garofalo, J. (a cura di) (1982), *Mathematical problem solving*, Franklin Institute Press.
- Lester, F. (1983), Trends and issues in mathematical problem solving research: Lesh, R. & Landau, I. (a cura di), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press.
- Luchins, A.S. & Luchins, E.H. (1970), *Wertheimer's seminars revisited: problem solving and thinking*, II, Faculty-Student Ass., State University of New York, Albany.
- Meirieu, P. (1987), *Apprendre... oui, mais comment?*, ESF, Paris.
- Mosconi, G. & D'Urso, V. (1973), *La soluzione dei problemi*, Giunti-Barbèra, Firenze.
- Nesher, P. & Kilpatrick, J. (a cura di) (1990), *Cognition and mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Newell, A. & Simon, H.A. (1972), *Human problem solving*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Paivio, A. (1986), *Mental representation: a dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford.
- Pellerey, M. (1990), Controllo e autocontrollo nell'apprendimento scolastico: il gioco tra regolazione interna ed esterna: *Orientamenti pedagogici*, 3, 473-491.
- Pellerey, M. (1991a), Apprendere a pensare matematicamente: Resnick, L.B. & Ford, W.W., *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*, SEI, Torino.

- Pellerey, M. (1991b), *La ricerca in didattica della matematica: Atti del Convegno "Processi cognitivi e problemi della ricerca didattica disciplinare"*, Milano.
- Piaget, J. (1980), *Experiments in contradictions*, Chicago, The University of Chicago Press.
- Polya, G. (1963), *On learning, teaching and learning-teaching: NCTM, Teaching and learning: a problem solving focus*, NCTM.
- Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, I-II, Feltrinelli, Milano.
- Polya, G. (1983), *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli, Milano (edizione originale: 1945).
- Resnick, L.B. & Ford, W.W. (1991), *Psicologia della matematica ed apprendimento scolastico*, SEI, Torino (prima edizione: 1981).
- Schoenfeld, A. (1985), *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.
- Schoenfeld, A. (a cura di) (1985), *Cognitive science and mathematics education*, Erlbaum, Hillsdale.
- Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Shepard, R.N. (1980), *Internal representations: studies in perception imagery and cognition*, Bradford, Montgomery.
- Vergnaud, G. (1994), *Il bambino, la matematica e la realtà*, Armando, Roma (edizione originale: Lang, Berne 1981).
- Vigotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1978).
- Wertheimer, H. (1959), *Productive Thinking*, Harper & Row, New York.
- Wittman, E. (1981), The complementary roles of intuitive and reflective thinking in mathematics teaching: *Educational studies in mathematics*, 12, 3, 389-397.

Capitolo 3

Dal concreto all'astratto

3.1. MATEMATICA E ASTRAZIONE

3.1.1. Verso l'astrazione

Il ruolo dell'astrazione è essenziale, nella matematica. Per molti versi, la matematica è astrazione. Non ci dobbiamo dunque meravigliare della notevole importanza che lo studio dei procedimenti relativi all'astrazione assume nella didattica della matematica (Barth, 1990).

Che cosa significa *astrazione*? Le risposte possono essere molte, elaborate magari nei diversi ambiti disciplinari o culturali. Certo, fin dal momento in cui il bambino si rende conto che le proprie mani, le lenti dei propri occhiali e le ruote della propria bicicletta hanno qualche cosa in comune (hanno la stessa “numerosità”), egli opera, intuitivamente, spontaneamente, secondo un tipico procedimento di astrazione.

La matematica (e qui ci riferiamo al *savoir savant*, ricordato nel capitolo precedente: Chevallard, 1985) ha messo a punto tecniche e terminologie ben precise per formalizzare procedimenti come questi: ma le relazioni di equivalenza ed i passaggi al quoziente necessitano di “massicce dosi” di *trasposizione didattica* prima di poter entrare a far parte dei processi di insegnamento e di apprendimento. E, nel frattempo, i bambini riescono ugualmente a contare ed a confrontare insiemi diversi.

La didattica della matematica si occupa con la massima attenzione di ciò che accade, nella mente dell'allievo, in situazioni come quella ora descritta. Se, da un lato, non intendiamo trattare a livello specialistico questo delicatissimo argomento (rimandando il lettore alle indicazioni bibliografiche alla fine del capitolo), riteniamo utile fornire alcuni punti di riferimento, almeno dal punto di vista terminologico (consigliamo ancora la lettura di: D'Amore & Frabboni, 1996, dal quale trarremo le definizioni di questo paragrafo).

Chiameremo *immagine mentale* ciò che viene elaborato dall'allievo, anche involontariamente, a fronte di una qualsiasi sollecitazione (sia interna che proveniente dall'esterno). Si tratta di una immagine interna, dunque non espressa, almeno inizialmente. Tutte le immagini mentali riferite ad un concetto costituiscono il *modello mentale* relativo a tale concetto (Johnson-Laird, 1988).

Come abbiamo detto, fino a questo punto ci troviamo in una situazione *interna*. Ma le concezioni così formate devono spesso essere espresse, comunicate: mediante un'apposita *traduzione*, dunque, si viene a creare un modello *esterno*, esprimibile, talvolta, in un ben determinato linguaggio (ad esempio mediante parole, disegni etc.). Ogni forma di comunicazione di un contenuto, di un qualsiasi messaggio matematico avviene dunque con l'impiego di modelli esterni; i quali però sono derivati, ad esempio nella mente del nostro allievo, dai corrispondenti modelli interni.

Di estrema importanza, pertanto, sarebbe la conoscenza diretta del modello mentale (interno) di un concetto, modello che l'allievo stesso si è creato: tale conoscenza darebbe infatti la possibilità di capire molte cose a proposito di quanto il nostro allievo ha appreso sul concetto in questione; come sopra anticipato, la difficoltà consiste però nel fatto che tale modello interno non viene *mai* comunicato (esternamente).

Nel paragrafo seguente ci occuperemo di un importante esperimento relativo agli argomenti ora trattati. A tale proposito, torniamo a considerare la risoluzione dei problemi.

3.1.2. Un esperimento

Che cosa accade, dunque, quando uno studente si trova di fronte ad un problema? Ancora una volta, non è semplice rispondere in poche parole. Possiamo intanto dire che l'allievo, alle prese con un problema, si crea un modello mentale della situazione, "rappresenta" il testo (per una chiara ed efficace introduzione all'argomento si vedano: Zan, 1991-1992; D'Amore, 1993).

La corretta costruzione di tale modello mentale è molto importante per la risoluzione del problema assegnato; e sembra del tutto ovvio affermare che il fatto che un problema rifletta una situazione facilmente immaginabile in tutti i suoi dettagli (ad esempio, sia riferito ad oggetti familiari, di uso comune, che l'allievo può facilmente "pensare") possa agevolare la costruzione del modello mentale e, dunque, renda più semplice la risoluzione (su questo importante argomento hanno scritto molti ricercatori; ci limitiamo a citare: Johnson-Laird, 1988; Vergnaud, 1985; Paivio, 1986).

E qui... scatta il dubbio: *ma le cose vanno veramente così?*

Una recente ricerca di B. D'Amore, condotta al livello di scuola elementare (gli esperimenti descritti sono stati effettuati tra il 1993 e il 1995; si veda:

D'Amore, 1997b), ha messo pesantemente in discussione questa assunzione¹. Presentiamo brevemente tale ricerca.

È stato proposto a tre gruppi di allievi di V elementare (10-11 anni) di risolvere uno stesso problema, nel testo del quale, però, era stata inserita, per ciascuno di tali gruppi, una diversa parola.

Il testo del problema è il seguente:

Il Sig. Piero è un negoziante. Egli acquista 625 x a 500 lire ciascuna e le vende tutte per un totale di 480 000 lire. Qual è il guadagno per ciascuna x ?

Alla lettera x sono state sostituite, per i tre gruppi di allievi, le tre “parole”:

- *matite*
- *orettole*
- *przetqzyw*

La scelta di queste “parole” (le virgolette sono d’obbligo, *matite* a parte) era così motivata: il contesto descritto dal problema è facilmente immaginabile, in tutti i suoi dettagli, quando alla x è sostituita la parola *matite*. Diversa, invece, viene ad essere la situazione con *orettole* (che cosa sono queste benedette *orettole*? Da quale negoziante, nella mia esperienza, ho potuto acquistare delle *orettole*?). Eppure *orettole* è una parola “credibile”, che “suona bene”. Potrebbe esserci qualcosa che, in italiano, viene indicato da questa parola. La terza scelta, *przetqzyw*, sembra eludere ogni residua possibilità: *non* esiste alcun *przetqzyw*. O, comunque, non posso immaginarlo.

Ecco i risultati (nella categoria E sono state raggruppate le risposte esatte, a parte gli errori di calcolo; nella categoria N quelle non esatte; le percentuali sono arrotondate all’unità):

• <i>matite</i>	E:	56%	N:	44%
• <i>orettole</i>	E:	53%	N:	47%
• <i>przetqzyw</i>	E:	59%	N:	41%

¹ Confermiamo ancora una volta che il livello scolastico non deve essere considerato una “barriera” nella ricerca in didattica della matematica: risultati sperimentali ottenuti a livello di scuola elementare, ad esempio, sono interessanti (e in questo caso: illuminanti!) in senso generale.

Queste percentuali possono apparire davvero sorprendenti, alla luce delle considerazioni esposte poco sopra: a parte lievissime differenze, statisticamente del tutto insignificanti, esse possono essere infatti considerate *le stesse*.

Dunque, la ben diversa “immaginabilità” dei dettagli delle situazioni rappresentate *non* ha influito sulle percentuali di successo nella risoluzione del problema (o: “dei problemi”). Che cosa è accaduto, allora? Dobbiamo arguire che gli allievi *non* hanno fatto ricorso a modelli, che essi hanno rinunciato ad “immaginare” le situazioni descritte?

Sarebbe del tutto errato adottare sbrigativamente spiegazioni di questo genere. Riteniamo infatti che gli allievi *abbiano* fatto ricorso a modelli, indubbiamente; ma resta il fatto che la presenza di un elemento in parte o del tutto sconosciuto (*orettole, przetqzyw*) *non* li ha minimamente turbati. Non ha, insomma, modificato le loro strategie risolutive (e, quindi, le percentuali dei successi ottenuti). Possiamo notare che le situazioni descritte e immaginate, nei tre casi esaminati, avevano lo stesso grado di “complessità”: si trattava, in tutti i tre casi, di una (innocua) situazione *concreta*, dell’acquisto di un “qualcosa” (non importa di “che cosa”) da parte di un negoziante.

Non proponiamo al lettore una vera e propria “conclusione”: abbiamo già ricordato che la ricerca è tuttora in corso e sarebbe perciò arbitrario e pericoloso azzardare soluzioni categoriche. Vogliamo soltanto ribadire che la possibilità di immaginare una situazione *in tutti i suoi dettagli* non appare decisiva per l’impostazione della corretta risoluzione di un problema.

Concludiamo con un’osservazione di B. D’Amore e di B. Martini:

«Quando si risolve un problema il cui testo è dato per iscritto, per prima cosa ci si fa un modello mentale della situazione descritta dal testo, ... o, almeno, così si usa dire... È lecito chiedersi fino a che punto sia necessario farsi modelli mentali *dettagliati* delle situazioni descritte nei testi quando si vogliono risolvere problemi» (D’Amore & Martini, 1997, p. 156).

A ciascun insegnante lasciamo il compito di dare una risposta.

3.2. UN ESEMPIO CRUCIALE: GLI INSIEMI

3.2.1. Rappresentazione e registri semiotici

Gli oggetti matematici non esistono concretamente e la loro espressione richiede l’uso di registri semiotici (Duval, 1995): non ci sono concetti senza

segni (Vygotsky, 1962), dunque insegnanti ed allievi devono rappresentare gli oggetti matematici. La prima introduzione didattica della nozione di insieme è basata su descrizioni verbali, ma naturalmente diversi registri possono essere usati per rappresentare la nozione di insieme (per quanto riguarda la dicotomia tra oggetti e concetti si veda: D'Amore, 2001, dove l'Autore sottolinea che una rappresentazione semiotica richiede il riferimento ad un particolare registro rappresentativo).

Per quanto riguarda le rappresentazioni visuali degli insiemi, i diagrammi di Eulero (1772) sono stati introdotti da Leonhard Euler (1707-1783) e ripresi (1881) da John Venn (1834-1923) per esprimere le relazioni tra insiemi (con riferimento a diversi campi di applicazione, i diagrammi di Johnston illustrano la logica preposizionale e sono equivalenti alle tavole di verità). Faremo riferimento ad essi con la denominazione *diagrammi di Eulero-Venn*.

Esamineremo alcune caratteristiche di queste rappresentazioni, in particolare di quelle visuali, sulla base dei dati di due esperienze. Scopo della ricerca è di mostrare che i registri rappresentativi non possono essere considerati assolutamente, ma sono concettualmente collegati e dipendono da vari aspetti culturali (un'analisi storica è in: Bagni, in stampa-b).

Il *paradosso cognitivo del pensiero matematico* è precisato da R. Duval (1993), il quale sottolinea che l'apprendimento matematico è concettuale ma l'attività con gli oggetti matematici coinvolge rappresentazioni semiotiche. È dunque necessario distinguere l'oggetto matematico (pur senza, con ciò, indicarne un'esistenza in senso platonistico: Bagni, in stampa-a) dalle sue singole rappresentazioni; la presenza di diversi registri è importante per il funzionamento cognitivo della mente umana (Duval, 1995), dunque lo studio delle rappresentazioni è centrale nella ricerca in didattica.

Per quanto riguarda le connessioni tra l'esperienza umana ed i sistemi matematici formali, nella tradizione piagetiana, la distinzione tra strutture fisiche e mentali si collega spesso alla distinzione tra il significato, interno, e il significante, esterno; l'interazione tra i due livelli (dei quali uno è osservabile) è ciclica: l'attività mentale può avere luogo indipendentemente da quella fisica, ma le stesse strutture mentali possono essere considerate il prodotto di azioni fisiche (Kaput, 1993). Non considereremo la distinzione tra strutture interne (mentali) ed rappresentazioni esterne in termini di opposizione.

È inoltre necessario tenere conto delle connessioni tra esperienze spaziali e temporali (ad esempio i movimenti corporei), la cui importanza è stata sottolineata da molte ricerche, e l'attività di simbolizzazione (Radford, 2002 e 2003; per quanto riguarda l'*embodied cognition* il riferimento è a: Lakoff & Núñez, 2000). Tali considerazioni potranno essere riprese nell'interpretazione dei diagrammi di Eulero-Venn da parte degli allievi.

L'uso di sistemi di rappresentazione (sia tradizionali che nuovi) implica la loro *legittimazione*, con i due aspetti, mutuamente connessi, politico ed epistemologico (Godino & Batanero, 1994).

Per quanto riguarda l'approccio strumentale di P. Rabardel, se ci riferiamo ad un oggetto simbolico come ad un artefatto (ad esempio: i diagrammi di Eulero-Venn), per poterlo considerare uno strumento è necessaria un'attività costruttiva da parte del soggetto, la quale dipende da vari aspetti concettuali e sociali (Rabardel, 1995): ciò conferma come sia impossibile riferirsi ad una rappresentazione formale in un dato registro in termini assoluti.

3.2.2. Rappresentazione di insiemi

“È davvero un pregiudizio pensare che le figure siano meno rigorose (...), scambiando il disegno usato come simbolismo col disegno volto a produrre un certo effetto visivo”.

Ludwig Wittgenstein (1982, p. 138)

La presentazione didattica dei primi elementi della teoria intuitiva degli insiemi propone situazioni interessanti. Si utilizzano più registri rappresentativi: *verbali* (ad esempio le parole “insieme”, “elemento”, “appartenenza”, “insieme vuoto”, “sottoinsieme”, “inclusione”, “unione”, “intersezione” etc. e le relative definizioni, quando ci sono); *simbolici* (le lettere maiuscole e minuscole, le varie parentesi, i simboli “ $\in$ ”, “ $\subseteq$ ”, “ $\emptyset$ ”, “ $\cup$ ”, “ $\cap$ ” etc.), *visuali* (i diagrammi di Eulero-Venn etc.).

Come premesso, ci occuperemo principalmente di rappresentazioni visuali, in particolare dei diagrammi di Eulero-Venn. Certamente quando un allievo traccia una linea curva per racchiudere una collezione di oggetti compie un'azione importante e significativa: ma il significato di una rappresentazione non può essere svincolato dall'uso (seguendo ad esempio: Wittgenstein, 1982) e tale osservazione, come vedremo, sarà alla base di difficoltà interpretative anche notevoli.

Importante è inoltre sottolineare che i diagrammi di Eulero-Venn non possono essere confusi con lo stesso concetto di insieme (Freudenthal, 1983): il passaggio dalla prima considerazione di elementi collegati tra loro alla corretta nozione di insieme è tutt'altro che semplice (Radford, 2002 e 2003). Le seguenti annotazioni di R. Ferro (che potrebbero essere ricondotte al concetto di “sostanzialità” nell'accezione di: Casari, 1964, p. 21) saranno importanti per la nostra ricerca:

“Mediante i diagrammi si evoca l'appartenenza di un elemento, indicato da un punto, ad una collezione. Ma come proporre la situazione se l'elemento indicato dal punto è a sua volta una collezione o se la collezione indicata da una regione è pensata come elemento? L'idea di indicare un elemento con una regione interna non va bene perché fa confondere l'appartenenza con la relazione di sottocollezione, che è tutt'altro” (Ferro, 1993, p. 1086).

È dunque fondamentale considerare la differenza tra *appartenenza* ($x \in I$) e *inclusione* ($\{x\} \subseteq I$, cioè appartenenza all'insieme delle parti: $\{x\} \in \wp(I)$); tale differenza, in genere chiara quando le espressioni sono verbali o simboliche, dovrebbe emergere anche per le rappresentazioni visuali.

[Si noti che $a \in b$ e $a \subseteq b$ non sono situazioni alternative. Ad esempio, se consideriamo i numeri naturali secondo l'introduzione di von Neumann, 0 viene fatto corrispondere a $\emptyset$, 1 a $\{\emptyset\}$, 2 a $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 3 a $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ etc.; si verifica che risulta per $a < b$ sia $a \in b$ che $a \subseteq b$. Segnaliamo inoltre che si definisce *insieme transitivo* un insieme a tale che $\forall x (x \in a \rightarrow x \subseteq a)$]

Presenteremo due esperienze collegate a diversi livelli scolastici: la prima (A) riguarderà l'introduzione degli insiemi ad allievi di 11 anni e ci consentirà di mettere a fuoco elementi utili per l'interpretazione della seconda (B), collegata ad allievi di 15 anni (in Italia: primo biennio della scuola secondaria superiore).

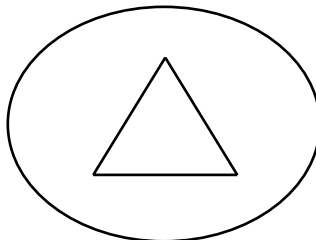
3.2.3. Una prima esperienza

Iniziamo con la descrizione di una breve esperienza in cui sono coinvolte due allieve di 11 anni e l'insegnante. L'esperienza ha avuto luogo durante una lezione, in classe, in situazione non valutativa.

L'insegnante scrive alla lavagna:

Rappresenta graficamente l'insieme costituito dai lati di un triangolo

S. (alla lavagna, disegna un triangolo e lo racchiude con una linea ellittica):
“Ecco”.



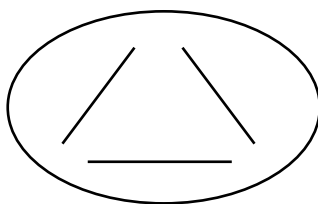
Insegnante: “Non è sbagliato, hai fatto un bel disegno. Però guardando potrebbe essere un insieme con un elemento solo”.

S.: “Perché uno? Ho fatto tre lati”.

Insegnante: “Sì, ma fanno parte del triangolo: è un triangolo che ti viene in mente, tutta la figura, non i tre lati”.

G. (*interviene dal posto*): “Eh, anch’io ci vedo il triangolo e no i tre lati!”.

S. (*un po’ contrariata, rivolgendosi alla compagna*): “Già, e cosa devo fare? Devo romperlo?” (*cancella il triangolo e ridisegna i tre lati separati*).



G.: “No, così non è un triangolo, l’esercizio diceva triangolo”.

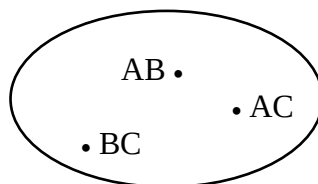
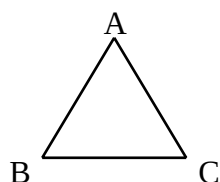
Insegnante (*rivolta a S.*): “Momento, la tua risposta andava bene se si interpreta bene la figura. Provi a pensare a un’altra rappresentazione?”

S.: “Ancora con quei disegni lì?”

Insegnante: “Sì, coi diagrammi di Eulero-Venn”.

S. (*dopo qualche secondo*): “Mm, no”.

Insegnante: “Senti, cerco di darti un’idea. Ti ricordi che quando facciamo geometria usiamo le lettere per dare i nomi ai punti e ai lati? Proviamo anche qui. Eh, ti va?”. (*Disegna alla lavagna le figure seguenti*).



G.: “Secondo me è questo disegno che va bene perché si vede che ce ne hai tre”.

S. (*perplessa*): “Sì però dentro non c’è mica scritto che quelli lì sono i lati, cioè come faccio a saperlo, devo guardare fuori...”

Fermiamoci qui. Come accennato, la breve esperienza descritta, pur essendo limitata ad uno scambio di battute, è utile per introdurre il problema. Alcuni spunti sono interessanti: le tre rappresentazioni proposte differiscono tra di loro

soprattutto per quello che potremo chiamare il grado di *verosimiglianza* rispetto alla situazione geometrica rappresentata:

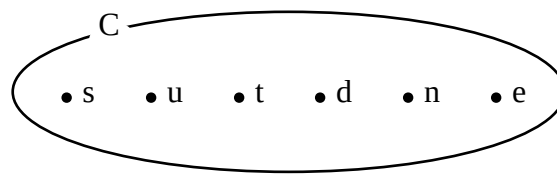
- nella prima rappresentazione, gli elementi dell'insieme sono disegnati, *riprodotti* come segmenti e come lati di un triangolo, più che semplicemente rappresentati;
- nella seconda, gli elementi restano segmenti, ma vengono disegnati in una reciproca posizione che non corrisponde a quella dei lati di un triangolo;
- nella terza gli elementi sono rappresentati solamente da punti: la loro interpretazione come lati di un triangolo richiede una figura esplicativa, esterna alla rappresentazione.

Significativa è inoltre l'osservazione dell'insegnante secondo la quale le rappresentazioni devono essere interpretate ("la tua risposta andava bene se si interpreta bene la figura"). Approfondiremo queste tematiche esaminando la seconda esperienza.

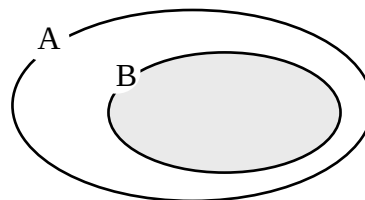
3.2.4. Una seconda esperienza

K., 15 anni, frequenta il primo anno del corso di Ginnasio-Liceo Classico (IV ginnasio, a Treviso). Il suo profitto è medio-alto in tutte le materie. Per valutare l'esperienza sarà utile conoscere alcune caratteristiche dell'insegnamento (ci baseremo sul libro di testo di K.). Tra gli argomenti introdotti nella classe di K. segnaliamo:

- elementi, insiemi, appartenenza: (dal libro di testo di K.) "In matematica si usa la parola *insieme* per indicare un raggruppamento, una raccolta, una collezione di *elementi*: questi possono essere oggetti, individui, simboli, numeri, figure geometriche etc. Riterremo che gli elementi di un insieme siano ben definiti e distinti tra loro. (...) Generalmente gli insiemi si indicano con lettere maiuscole; gli elementi di un insieme si indicano con lettere minuscole. La scrittura $a \in A$ si legge *a appartiene ad A*";
- i diagrammi di Eulero-Venn: (dal libro di testo di K.) "Si dà una rappresentazione geometrica: si delimita con una linea chiusa una regione del piano e si rappresentano gli elementi dell'insieme mediante punti all'interno di tale regione (eventualmente indicando il nome di ciascun elemento accanto al punto che lo rappresenta)"; riportiamo l'esempio riguardante l'insieme C delle consonanti della parola *studente*:



- sottoinsiemi, inclusione: (dal libro di testo di K.) “Considerati due insiemi A e B si dice che B è un sottoinsieme di A quando ogni elemento di B appartiene anche ad A. In simboli si scrive $B \subseteq A$ che si legge *B è contenuto in A o è uguale ad A o B è incluso in A o è uguale ad A*”; riportiamo l’esempio indicato:



- insieme delle parti: (dal libro di testo di K.) “Dato un insieme A si definisce insieme delle parti di A quell’insieme, indicato con $\wp(A)$, che ha per elementi tutti i possibili sottoinsiemi di A. (...) In generale, se A contiene n elementi, $\wp(A)$ ha 2^n elementi”.

Prima di proseguire ci sembrano opportune due osservazioni: innanzitutto va sottolineato l’uso ambiguo del termine *contiene*: parlando di sottoinsiemi si equiparano esplicitamente le espressioni *è incluso* ed *è contenuto*; ma parlando dell’insieme delle parti si afferma: *se A contiene n elementi, $\wp(A)$ ha 2^n elementi* e si utilizza il termine *contiene* con riferimento all’appartenenza. Inoltre è interessante notare l’uso leggermente diverso dei diagrammi di Eulero-Venn nei due esempi riportati: nel primo, gli elementi sono indicati da alcuni (singoli) punti, ben evidenziati e con il nome dell’elemento rappresentato a fianco; nel secondo, invece, i singoli elementi non sono specificati: tutti i punti della parte di piano interna alla linea chiusa potrebbero essere considerati elementi dell’insieme.

Nel corso delle lezioni, a K. erano stati presentati esempi collegati ad insiemi di oggetti e di numeri; non raramente è stata indicata la rappresentazione visuale con i diagrammi di Eulero-Venn. Erano stati proposti esempi riguardanti figure geometriche in generale, per illustrare la nozione di sottoinsieme (ad esempio: l’insieme dei quadrati è sottoinsieme dell’insieme dei rettangoli, il quale è sottoinsieme dell’insieme dei parallelogrammi etc.).

Durante un'esercitazione orale in classe (non in un'occasione di valutazione), a K. è stato proposto l'esercizio seguente:

I è l'insieme dei punti del piano. R è l'insieme dei punti di una retta data nel piano.

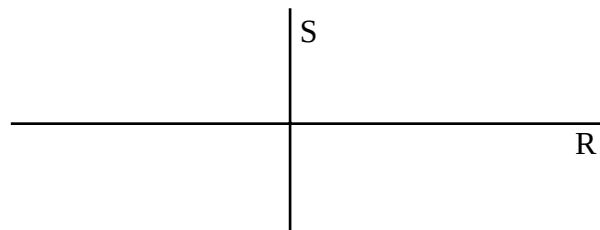
S è l'insieme dei punti di una retta data nel piano perpendicolare alla precedente.

A è l'insieme che ha per elementi R e S.

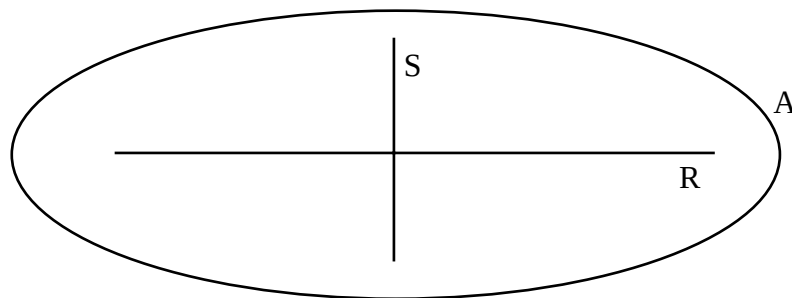
A appartiene all'insieme delle parti di I?

La traccia dell'esercizio, dettata dallo sperimentatore (che interveniva alla lezione ma non era l'insegnante di matematica nella classe di K.), è stata scritta sulla lavagna dall'allieva. K. è stata poi lasciata libera di procedere per la sua risoluzione.

K. (senza parlare) traccia sulla lavagna due rette perpendicolari e le contrassegna con R e S.



Subito dopo, K. racchiude quanto tracciato con una linea ellittica e scrive "A".



K.: "Questo è l'insieme A". (*Rilegge velocemente la traccia dell'esercizio*).

"Adesso guardiamo se appartiene all'insieme delle parti di I".

K. (*dopo aver guardato lo sperimentatore*): "delle parti di I contiene tutti i sottoinsiemi. Le figure sono fatte di punti e quindi tutte le figure sono elementi dell'insieme delle parti di I".

K. (dopo dieci secondi): “A contiene le due rette... e allora è una figura del piano” (indica le rette).

K. (fissa lo sperimentatore): “Sì, sì, A è un elemento dell’insieme delle parti”.

Iniziamo ad esaminare il ragionamento di K. dal punto di vista della sua espressione verbale:

- “L’insieme delle parti di I *contiene* i sottoinsiemi di I”.
- “Tutte le figure del piano sono degli elementi dell’insieme delle parti di I”.
- “A *contiene* le due rette ed è una *figura del piano*”.
- “Dunque A è un elemento dell’insieme delle parti di I”.

Qui emerge l’ambiguità del termine *contiene*: nella prima frase K. si riferisce ad una situazione di appartenenza; ma nella terza frase dice “A *contiene* le due rette” e in base a ciò “è una *figura del piano*”: dunque intende: $R \subseteq A$ e $S \subseteq A$. Possiamo quindi confermare l’impressione già segnalata a proposito della potenziale problematicità dell’uso di un termine il cui significato non sia stato sufficientemente chiarito.

Osserviamo che non è questa l’unica situazione di termini che in matematica possono assumere significati diversi: ad esempio, talvolta il *pari* è riferito all’uguaglianza (è *pari a...*) e talvolta agli interi multipli di due. Queste diverse accezioni (a parte i chiari collegamenti tra di esse: un numero pari di oggetti può essere diviso in due parti uguali) non creano però occasioni di malinteso. Inoltre nel caso del termine *contiene* riferito all’appartenenza e all’inclusione sono disponibili sinonimi efficaci (cioè tali da non causare ambiguità).

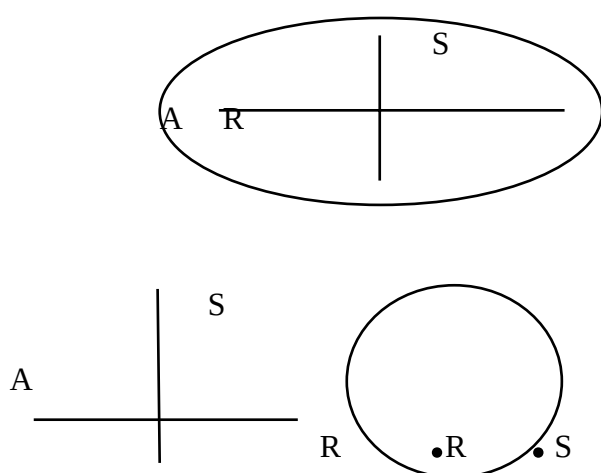
Cerchiamo di capire perché in una prima fase K. ha utilizzato il termine *contiene* con riferimento all’appartenenza e successivamente per indicare l’inclusione. Che cosa ha indotto K. a fare ciò? Ripercorriamo brevemente le fasi della risoluzione con particolare riferimento ai registri rappresentativi coinvolti:

- l’esercizio dato è espresso verbalmente;
- subito K. traduce la situazione in un registro visuale e traccia le due rette;
- in tale registro K. accorpa le rette tracciando attorno ad esse una linea ellittica;
- poi continua a riferirsi a quanto tracciato e parla dell’insieme A dicendo “le due rette”.

L’uso (precipitoso?) di un registro visuale sembra quindi aver impedito a K. di apprezzare la sfumatura chiave: A è l’insieme che ha *per elementi* i due

oggetti R e S. Invece K. fa riferimento all'intera "figura" $A = R \cup S$: le rette perpendicolari tracciate hanno forse indotto l'allieva a considerare una *figura unica* (ed il termine *contiene* viene collegato all'inclusione).

È essenziale rilevare che durante la propria risoluzione K. ha costruito l'insieme A in un registro visuale, ma utilizzando tale registro (cioè interpretando i diagrammi di Eulero-Venn) impropriamente. Sottolineiamo infatti che quello di K. è un uso del registro visuale, ben diverso, ad esempio, da quello corretto dei diagrammi di Eulero-Venn: ma il fatto di usare una rappresentazione *legittimata* (riprendiamo il termine da: Radford, 2002) induce l'allieva a trarre dai diagrammi disegnati alcune conclusioni che si rivelano inesatte.



Questa situazione (alla quale evidentemente K. si riferisce) ha indotto l'allieva a considerare R, S come sottoinsiemi di A. In questo caso il diagramma di Eulero-Venn è utilizzato in modo improprio.

La situazione illustrata a lato (in cui il diagramma di Eulero-Venn viene utilizzato adeguatamente) suggerirebbe invece il corretto riferimento all'appartenenza di R e di S all'insieme A.

La rappresentazione alla quale fa riferimento K. è impropria perché la rappresentazione geometrica delle rette perpendicolari non è rilevante rispetto al concetto di insieme: la scelta di stabilire una relazione tra gli elementi dell'insieme è arbitraria.

Anticipiamo un'osservazione che riprenderemo: con quanto notato non vogliamo sostenere che l'uso del registro visuale sia controproducente. Ma ribadiamo che, nella situazione in esame, sarebbe stato preferibile per K. evitare il ricorso ad un registro visuale *il cui uso improprio (o non sufficientemente chiarito) ha portato ad un errore*.

Quale avrebbe potuto essere una strategia per raggiungere il risultato esatto? A parte l'uso corretto dei diagrammi di Eulero-Venn, a cui abbiamo sopra fatto cenno, una possibilità è la seguente: invece di passare subito ad un registro visuale, K. avrebbe dunque potuto mantenere il riferimento alla traccia dell'esercizio (espressa verbalmente) e costruire l'insieme A solo sulla base di quanto indicato in tale traccia.

Proponiamo la prosecuzione dell'esperienza:

Sperim.: “Torniamo un po’ alle definizioni”. (*Cancello il disegno alla lavagna e scrivo*):

$\{R; S\} \in \wp(I)$ significa $\{R; S\} \subseteq I$ e ciò significa $R \in I$ e $S \in I$

Sperim.: “Adesso pensa: è vero o non è vero che R appartiene a I e S appartiene a I?”

K.: “I è il piano e R e S sono delle rette” (*sta per disegnarle ancora*).

Sperim.: “No per favore, non disegnare per adesso. Hai detto che I è il piano, ecco, puoi dirlo meglio, insomma puoi essere più precisa?”

K. (*dopo alcuni secondi, rilegge la traccia dell’esercizio*): “Beh, I sarebbe l’insieme di punti, dei punti del piano. Sì, cioè non è una cosa da sola, è un insieme, si scrive con la maiuscola”.

Sperim.: “un insieme di... che cosa?”

K.: “Mm, punti. Punti del piano”.

Sperim. (*indica l’ultima parte di quanto precedentemente scritto alla lavagna*): $R \in I$ e $S \in I$: “Allora R e S, sono elementi di I?”

K. (*dopo alcuni secondi, un po’ incerta*): “Ah no, già, è vero, R e S sarebbero insiemi, mica elementi. Anche loro si scrivono con la maiuscola”.

L’argomentazione non appare convincente (né convinta): sembra basata su di un’alternativa tra “insiemi” ed “elementi” e non evidenzia il fatto più semplice: R e S *non sono punti del piano e pertanto non appartengono a I*. In particolare il fatto che R, S (e I) siano “scritti con le maiuscole” è poco significativo per la risoluzione. Ciò rende opportuna un’annotazione: l’uso tradizionale delle lettere minuscole per gli elementi e delle lettere maiuscole per gli insiemi può avere alcune controindicazioni importanti. Si rischia una suddivisione degli oggetti matematici in due categorie separate: dal punto di vista didattico una tale distinzione può essere inizialmente utile, ma l’appartenenza di un insieme ad un altro (ad esempio quando si considera l’insieme delle parti) può determinare dei conflitti con le tradizioni di notazione simbolica. Si potrebbe addirittura giungere alla formazione di una pericolosa misconcezione secondo la quale *un insieme non può appartenere ad un altro insieme*.

Notiamo tuttavia che la presenza di lunghe “catene” di oggetti matematici del tipo $a \in b \in c \dots$ è piuttosto rara, nei testi di matematica (a parte testi specifici di teoria degli insiemi) e ancora più rara nei testi scolastici. Dunque il tradizionale impiego delle lettere minuscole per gli elementi e delle maiuscole per gli insiemi può essere accettabile, se adeguatamente chiarito.

Nonostante il tentativo messo in atto nella seconda parte dell’esperienza, K. non sembra trovarsi a proprio agio nell’applicare formalmente le definizioni

(l'allieva tende a riprendere il registro visuale). I registri visuali appaiono concreti, rassicuranti, aderenti all'esempio considerato: l'argomento ha a che vedere con oggetti geometrici, uno dei settori tradizionalmente associati all'uso di registri visuali (per i fenomeni di settorializzazione: Schoenfeld, 1986). I registri simbolici sono invece più generali (anche se non raramente si usano simboli con un valore implicito: si pensi alla differenza tra x e x_0 , a n per indicare un naturale, a p per un numero primo etc.) e richiedono una più impegnativa astrazione.

3.2.5. Conclusioni: tra concretezza e astrazione

Come anticipato, non intendiamo scoraggiare l'uso dei registri visuali (né delle altre forme di rappresentazione). Ma l'uso di un registro non è neutro, naturale, bensì è fondato su convenzioni, tradizioni, norme: lo stesso significato di un linguaggio può essere basato sull'uso (Wittgenstein, 1999) e tutto ciò deve essere considerato dall'insegnante.

Per quanto riguarda i diagrammi di Eulero-Venn, è necessario tenere conto delle connessioni tra l'azione con la quale gli allievi racchiudono alcuni elementi con una linea ellittica e la formazione del concetto di insieme (Radford, 2002 e 2003). Questa operazione porta ad una rappresentazione visuale, ma è collegata a molti aspetti, ad esempio simbolici, e tali connessioni devono essere analizzate e studiate. L'uso di un registro collega altri aspetti concettuali, e ciò vale in generale: ad esempio, i registri verbali fanno riferimento alle parole e dunque ai significati di tali parole, significati che coinvolgono ovviamente altri registri.

Non c'è un solo registro rappresentativo di un tipo considerato: ad esempio ci sono diversi registri visuali e, più propriamente, diversi modi di proporre e di intendere la stessa rappresentazione. Una rappresentazione non può dunque essere considerata in termini assoluti: la sua legittimazione deve fare riferimento ad un contesto.

Tornando ai registri visuali, una rappresentazione non è sempre esatta: i diagrammi di Eulero-Venn operano in ambito visuale, ma coinvolgono aspetti collegati alla simbolizzazione (quando indichiamo un elemento non ne proponiamo la rappresentazione accurata). Se inconsciamente ci riferiamo ad una qualche esattezza della rappresentazione rischiamo di introdurre implicitamente relazioni improprie tra gli elementi dell'insieme considerato.

Spesso le rappresentazioni si chiariscono facendo riferimento all'uso (citiamo ancora: Wittgenstein, 1999): dunque suggeriamo un'adeguata negoziazione dei significati che coinvolga insegnante e allievi. Ciò può essere riferito ad ogni tipo di rappresentazione: i significati dei termini devono essere fissati senza ambiguità, i simboli usati e le loro caratteristiche (ad esempio:

lettere minuscole e maiuscole) devono essere chiariti. Un uso superficiale o scorretto di termini, simboli e rappresentazioni visuali può rivelarsi didatticamente pericoloso e causare la formazione di ostacoli e di misconcezioni.

“In primo luogo il nostro linguaggio descrive un’immagine. che cosa si debba fare di quest’immagine, in qual modo la si debba impiegare, rimane oscuro. Ma è chiaro che, se vogliamo comprendere il senso di quello che diciamo, dobbiamo esplorare l’immagine. Ma l’immagine sembra risparmiarci questa fatica; allude già a un impiego determinato. Così si beffa di noi”.

Ludwig Wittgenstein (1999, p. 244)

3.3. APPRENDIMENTO E ARTEFATTI

3.3.1. Un’esperienza interculturale

L’impostazione interculturale può essere particolarmente produttiva in ambito didattico: essa non prevede infatti un semplice accostamento di esperienze derivanti dalle diverse culture, bensì è basata su di un’efficace interazione, su di un confronto paritetico che porti alla valorizzazione delle differenze (ci basiamo su quanto illustrato in: Cipollari & Portera, 2004).

Nel presente lavoro proporremo un’esperienza didattica basata sull’uso di artefatti derivati dalla tradizione della matematica cinese.

La tradizionale indicazione cinese di numeri mediante bastoncini è spontaneamente riferibile alle dita della mano. Secondo tale interpretazione, però, dopo le 5 unità (corrispondenti a 5 dita) è necessario ricorrere all’altra mano, indicando che è stata già considerata una mano completa:



Nel raggiungere il 10 dobbiamo affrontare una situazione importante: per non restare bloccati (avendo esaurito le dita delle mani) introdurremo le decine che si potrebbero indicare mediante le stesse disposizioni di bacchette usate per le unità, spostate più a sinistra. Per evitare malintesi, tuttavia, i Cinesi

utilizzavano per le decine delle disposizioni (*Heng*) diverse da quelle per le unità (*Tsung*):



Per le centinaia le disposizioni usate erano *Tsung*, per le migliaia *Heng* etc.

Fino al XII sec. lo zero era indicato da uno spazio vuoto (proprio questa assenza ha reso opportuno l'uso di due gruppi diversi di simboli). Dal 200 a.C. i Cinesi indicarono anche numeri negativi distinguendo il colore delle bacchette, rosse e nere.

Le bacchette erano un ausilio per il calcolo: esse davano la possibilità di formare praticamente i “numerali-bacchette” su di una superficie piana (la tavola da calcolo aritmetica, quadrettata, in cui le operazioni erano eseguite sfruttando le caratteristiche della notazione posizionale) e di cancellare facilmente i numeri che non servivano più. L'uso delle bacchette tramonta nella tarda epoca Ming (1368-1644) quando furono soppiantate dall'abaco.

3.3.2. Il quadro teorico

“Ogni giorno impariamo un linguaggio comune, certe parole ci vengono insegnate mostrandoci oggetti etc., e in connessione con essi escogitiamo una certa immagine. Poi, gradatamente, modifichiamo l'uso delle parole e, quanto più lo modifichiamo, tanto meno appropriata diventa quell'immagine, fino a diventare assolutamente ridicola. (...) Abbiamo bisogno di qualcosa di più dell'immagine giusta, abbiamo bisogno di sapere come la si usa”.

Ludwig Wittgenstein (1982, p. 19)

Un'applicazione delle bacchette da calcolo nel campo della ricerca in didattica della matematica richiede la precisazione di un quadro teorico: ci rifaremo a quanto proposto da Bartolini Bussi, Mariotti e Ferri (in stampa) che si basa sui lavori di Vygotskij (1974 e 1987), di Bachtin (1979 e 1988), di Engestroem (1990) e di Wartofsky (1979). In particolare, Vygotskij riconosce funzioni di mediazione agli strumenti tecnici e psicologici (segni o strumenti di mediazione semiotica: Vygotskij, 1974). Wartofsky (1979) identifica gli

strumenti tecnici come *artefatti primari*; gli *artefatti secondari* sono usati per fissare e trasmettere le modalità di azione.

Le bacchette da calcolo sono considerate, in prima lettura, artefatti primari; regole e convenzioni rappresentative corrispondono ad artefatti secondari; una teoria matematica è un *artefatto terziario* che organizza gli artefatti secondari. Si può supporre (Bartolini Bussi, 2002; Bartolini Bussi & Boni, 2003) che gli aspetti pratico, rappresentativo e teorico siano incorporati (potenzialmente) nell'attività che si svolge con l'artefatto che, in tale modo, acquista caratteristiche di *polisemia* (Engestroem, 1990).

Didatticamente significativo è che l'uso degli artefatti primari richieda la loro manipolazione (Vygotskij, 1987, p. 45). L'importanza degli aspetti corporei si accorda con la recente posizione della scienza cognitiva basata sui lavori di Lakoff, Johnson e Núñez (Lakoff & Núñez, 2000), secondo la quale la formazione di idee matematiche si basa sull'esperienza sensoriale-motoria (Mariotti, 2005).

3.3.3. Matematica cinese e carattere posizionale

I problemi che noi oggi risolviamo algebricamente sono presenti in alcune tradizioni matematiche a partire dal II millennio a.C., ad esempio presso i Babilonesi. In Cina l'algebra è presente dal II sec. a.C. in forma retorica o sincopata (ideogrammi monosillabici per quantità e operazioni) con un importante "carattere posizionale" (Needham 1959, p. 112; Martzloff, 1987). La tavola di calcolo in versione algebrica era impostata in modo che determinate posizioni fossero occupate sempre da particolari tipi di grandezze (incognite, potenze etc.) e tale convenzione può considerarsi un artefatto secondario. Venne introdotto così un sistema che implicò la "registrazione di modelli matematici" (Needham, 1959, p. 113).

Storicamente, il carattere posizionale dell'algebra cinese ha avuto conseguenze diverse: da un lato, pose implicitamente l'accento sull'importanza dell'impostazione matriciale (ma il concetto di determinante fu sviluppato piuttosto tardi, nel 1683, dal giapponese Seki Kowa); parallelamente, però, determinò l'inibizione dello sviluppo di un simbolismo algebrico.

Nel presente lavoro si esamina il problema seguente che riprende, con variazioni numeriche, un problema del capitolo VIII (*Fang Cheng*) del *Chiu Chang* (opera precedente al I sec.):

Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng. Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?

Esso porta al sistema di equazioni lineari che, nella nostra notazione moderna, sarebbe scritto:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Coefficienti e termini noti sono riportati in una tabella a due righe e tre colonne che viene modificata secondo le regole seguenti:

- (1) si possono variare in proporzione i termini delle righe;
- (2) a una riga si può sostituire la riga ottenuta sommando o sottraendo i termini corrispondenti di due righe.

Riportiamo una possibile soluzione del sistema ottenuta con in metodo ora indicato:

5	3	19	15	9	57	15	9	57
3	2	12	3	2	12	15	10	60
15	9	57	15	9	57	15	0	30
0	1	3	0	9	27	0	9	27
1	0	2						
0	1	3						

corrispondente alla soluzione: $x = 2$ e $y = 3$

Il procedimento risolutivo può essere riprodotto con le bacchette da calcolo e ciò risulta significativo nella pratica didattica: innanzitutto la realizzazione del procedimento si mantiene aderente alla tradizione storica anche dal punto di vista pratico; anticipiamo inoltre che la manipolazione delle bacchette determina situazioni interessanti.

Come vedremo, infatti, gli allievi possono accostarsi ad alcune proprietà di invarianza delle equazioni in modo intuitivo; i coefficienti nulli corrispondono ad un'assenza fisica di “disturbo”.

corrispondente alla soluzione: $x = 2$ e $y = 3$

Naturalmente quella ora riportata è soltanto una delle (molte) possibili soluzioni derivanti dall'applicazione del procedimento. Mediante l'esame di una situazione sperimentale verificheremo quale sarà la scelta degli allievi.

Osserviamo che l'insegnante ha un ruolo importante per la presentazione delle modalità di uso (artefatto secondario) dell'artefatto primario: il rapporto degli artefatti è essenziale in quanto non esiste un solo “modo di usare” lo strumento considerato. L'insegnante dunque suggerisce scopi e strategie: l'elemento cruciale è ottenere la “sparizione” di una delle incognite, e l'assenza fisica di bacchette nella casella corrispondente al coefficiente nullo potrà essere importante.

3.3.4. Una ricerca sperimentale

Una prima verifica sperimentale è stata condotta in una scuola secondaria inferiore (a Treviso, I classe di una scuola media, allievi di 11-12 anni) ed ha consentito di notare che l'uso degli artefatti primari, bacchette e tavola da calcolo (strumenti tecnici), collegato a quello di artefatti secondari (convenzioni e modalità per variare le righe della tabella: strumenti

psicologici) può agevolare lo studente nell'accostamento alla risoluzione di sistemi lineari con metodi di eliminazione.

Al momento dell'esperienza gli allievi non avevano trattato i numeri negativi né le equazioni. Solo alcuni di essi avevano qualche esperienza (risalente alla scuola primaria) con semplici esercizi del tipo: "indovina un numero sapendo che..." L'esperienza si è svolta in aula, durante un'ora di lezione, alla presenza dell'insegnante di matematica e dello sperimentatore (che non è mai intervenuto).

Era stata precedentemente introdotta alla classe la rappresentazione dei numeri mediante le bacchette da calcolo; gli allievi hanno avuto occasione di esercitarsi.

In una tabella corredata con etichette, realizzata su di un banco, era stato poi rappresentato il problema: "due pacchetti uguali contengono, in tutto, quattro biscotti. Quanti biscotti ci sono in ciascun pacchetto?" Era stato poi mostrato che dividendo per 2 i numeri in tutte le caselle della tabella si ottiene la soluzione.

Gli allievi sono stati suddivisi in sei gruppi di tre. È stato quindi proposto il problema precedentemente esaminato: con le bacchette è stata realizzata la disposizione iniziale affermando che essa "rappresentava i dati". Sono state poi illustrate (anche con esempi) le regole che permettono di modificare tale disposizione.

Durante la risoluzione, il ruolo dell'insegnante è stato di controllo (passando tra i vari gruppi): ha segnalato eventuali errori, ma non ha dato suggerimenti.

Come ricordato, il problema tratto dal *Chiu Chang* descritto nel paragrafo IV porta al sistema di equazioni lineari che, nella nostra notazione moderna, è così espresso:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Dopo alcuni tentativi, l'allieva S., in collaborazione con F. (il terzo componente del gruppo non ha svolto un ruolo attivo) ha impostato la seguente risoluzione.

covoni tipo A	covoni tipo B	grano	covoni tipo A	covoni tipo B	grano	covoni tipo A	covoni tipo B	grano

I		II	I		II
covoni tipo A	covoni tipo B	grano	covoni tipo A	covoni tipo B	grano
I	I	IIII		I	III

dunque: $x = 2$ e $y = 3$

Significativi sono alcuni ampi gesti con le mani mediante i quali le allieve hanno indicato le varie righe dicendo:

“Adesso posso fare questi meno quelli”.

Indicativa, inoltre, è una frase pronunciata da F. (l’allieva che ha più attivamente collaborato con S.):

“Si riesce quando due diventano uguali”.

Possiamo notare che S. e F. hanno utilizzato solamente la regola che consente di sottrarre una riga dall’altra. Ma tale modo di procedere non è sempre applicabile (ricordiamo che gli allievi non avevano trattato i numeri negativi). Un secondo problema è stato allora proposto allo stesso gruppo:

Quattro covoni di grano di tipo A aggiunti a un covone di grano di tipo B hanno il rendimento di 6 sheng. Due covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 8 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?

Dopo una fase di perplessità con osservazioni del tipo:

“Non si può togliere questi da quelli, non ce ne sono abbastanza”,

l’allieva S. applica la regola che consente di moltiplicare gli elementi di una riga per $k > 0$ (in questo caso: la prima riga per $k = 3$). F. ribadisce:

“Sì, sì, bisogna far diventare questo uguale a questi!”

indicando le diverse righe, e il procedimento può quindi proseguire e concludersi.

		T	—		—	—		—
covoni tipo A	covoni tipo B	grano	covoni tipo A	covoni tipo B	grano	covoni tipo A	covoni tipo B	grano
covoni tipo A	covoni tipo B	grano	covoni tipo A	covoni tipo B	grano	covoni tipo A	covoni tipo B	grano
								T
covoni tipo A	covoni tipo B	grano						

corrispondente alla soluzione: $x = 1$ e $y = 2$

3.3.5. Conclusioni

“Una delle ragioni per cui si paragona la matematica a un gioco è che si vuol mostrare che essa è, in un certo senso, arbitraria (...). ‘Una regola diversa avrebbe adempiuto alla stessa funzione’, si potrebbe osservare. Quale funzione? Ciò suggerisce che non c’è nulla nell’oggetto del gioco che determina questa regola”.

Ludwig Wittgenstein (1982, pp. 147-148)

L’esperienza descritta può essere considerata un’importante occasione interculturale per un accostamento critico alla matematica cinese e al contesto nell’ambito del quale si è prodotta, ma assume significati notevoli anche dal particolare punto di vista della didattica della matematica.

Sebbene questa prima esperienza sia ancora piuttosto limitata e consenta solo di indicare considerazioni parziali (ulteriori verifiche sperimentali sono in corso), l’uso frequente da parte degli allievi di espressioni deittiche (“questi”,

“quelli”) accompagnato da una marcata componente gestuale è interessante (Steinbring, 2002). Inoltre gli allievi hanno dato la preferenza alle modalità d’uso (artefatto secondario) più direttamente legate alla presenza fisica dei bastoncini.

I dati finora esaminati sembrano suggerire che l’uso degli artefatti primari (bacchette e tavola da calcolo) collegato a quello di artefatti secondari (modalità per variare la tabella) possa agevolare la messa a punto di strategie risolutive, dunque l’accostamento agli artefatti terziari basati sulle attività con tali artefatti primari e secondari (si noti a tale riguardo che i Cinesi risolvevano sistemi di due equazioni in due incognite anche con altri metodi riassumibili in formule, ma il ruolo delle bacchette non appare in tali casi particolarmente significativo: Needham 1959 e Martzloff, 1987).

Nota H. Steinbring:

“Per esprimere le relazioni algebriche non sono sempre indispensabili tipici segni dell’algebra” (Steinbring, 2002, p. 20, la traduzione è nostra).

Una rappresentazione esterna come quella ottenuta mediante le bacchette sulla tavola da calcolo è costituita da un complesso di segni, relazioni spaziali, regole incorporate o comunque associate all’artefatto primario; ma particolarmente significativo è il contesto nell’ambito del quale gli allievi si accostano ad essa (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri & Garuti, 1997; Radford, 2002, 2003): tale contesto ha la caratteristica del gioco, più che della rappresentazione astratta.

Una traccia importante da esplorare è quindi la seguente: il contesto del gioco può favorire la costituzione di significati in termini più incisivi di quanto non faccia la rappresentazione astratta (algebrica)? Infatti il procedimento introdotto non è un artefatto secondario essenziale per garantire un evidente funzionamento dell’artefatto primario, come potrebbero essere ad esempio alcune indicazioni d’uso per realizzare una circonferenza mediante un compasso. Da questo punto di vista, le “regole” esaminate potrebbero essere considerate convenzionali, arbitrarie. Potrebbe dunque essere il gioco stesso (che, per l’allievo, è dotato di significato di per se stesso, in quanto gioco nuovo da “esplorare”) a conferire significato al procedimento algebrico (un parallelo interessante potrebbe essere condotto sulla base di: Wittgenstein, 1982 e 1999; si veda inoltre: Penco, 2004).

Ulteriori studi potranno chiarire se l’uso di bacchette e tavola da calcolo possa introdurre la risoluzione di sistemi con metodi di eliminazione e, più in generale, suggerire o sottolineare l’importanza dell’impostazione matriciale. Indichiamo inoltre una possibilità di semplificare l’artefatto secondario considerato: ad esempio, l’uso delle originali disposizioni *Tsung* e *Heng* non è indispensabile per la realizzazione pratica dell’esperienza e può essere, ad

esempio, ridotto ad un semplice impiego di bastoncini in numero sufficiente per indicare le cifre (che potrebbero essere espresse un ordine determinato dalla notazione decimale). Naturalmente l'aspetto interculturale dell'esperienza suggerisce di mantenere il riferimento all'artefatto secondario originale.

“Non facciamo distinzione tra l'avere significato e il non averlo, bensì tra l'essere usato e il non esserlo. Questa è una cosa molto importante, da tener presente quando si solleva il problema se la matematica sia soltanto un gioco fatto con simboli o se dipenda dal significato dei propri segni. Il problema svanisce quando si cessa di pensare al significato come a qualcosa che è nella mente (...). Il problema di conferire un significato indipendentemente dall'applicazione semplicemente non si pone”.

Ludwig Wittgenstein (1982, p. 231)

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO 3

- Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.
- Bachtin, M. (1979), *Estetica e romanzo*, Einaudi, Torino.
- Bachtin, M. (1988), *L'autore e l'eroe. Teoria letteraria e scienze umane*, Einaudi, Torino.
- Bagni, G.T. (1998a), L'infinitesimo. Infinitesimo potenziale ed infinitesimo attuale nelle concezioni degli studenti della scuola secondaria superiore: *L'educazione matematica*, in via di pubblicazione.
- Bagni, G.T. (1998b), *Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale*, in via di pubblicazione.
- Bagni, G.T. (in stampa-a), Cognition and representations of two major concepts of set theory, *Educational Studies in Mathematics*.
- Bagni, G.T. (in stampa-b), Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*.
- Barth, B.-M. (1990), *L'apprendimento dell'astrazione*, La Scuola, Brescia (prima edizione: Paris, 1987).
- Bartolini Bussi, M.G. & Boni, F. (2003), Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms, *For the Learning of Mathematics*, 23(2), 12-19.

- Bartolini Bussi, M.G., Mariotti, M.A. & Ferri, F. (in stampa), *Semiotic mediation in primary school: Dürer's glass*.
- Bartolini Bussi, M.G. (2002), The theoretical dimension of mathematics: a challenge for didacticians, *Proc. 2000 (24th) Annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, Montreal, 21-31.
- Boero, P. (1989), *Campi semantici nell'insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni su problemi di concettualizzazione e mediazione linguistica connessi ad esperienze di innovazione curricolare*, esposto oralmente a Pisa, sessione n. 6 del Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, maggio 1989.
- Bostock, D. (1972-1973), Aristotle, Zeno and the potential infinite, *Proceedings of the Aristotelian Society*, 73.
- Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.
- Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.
- Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.
- Brousseau, G. (1986), Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique des mathématiques*, 7, 2, 33-115.
- Casari, E. (1964), *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli, Milano.
- Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Cipollari, G. & Portera, A. (2004), *Cultura, culture, intercultura*, IRRE Marche, Ancona.
- D'Amore, B. & Sandri, P. (1993), Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili, *La Matematica e la sua didattica*, 3, 344-347.
- D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.
- D'Amore, B. & Giovannoni, L. (1997), Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico: *La matematica e la sua didattica*, 4, 360-399.
- D'Amore, B. & Martini, B. (1997), Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard: *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-175.
- D'Amore, B. & Sandri, P. (1997), *Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante* (in via di pubblicazione).
- D'Amore, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.
- D'Amore, B. (1997a), Bibliografia in progress sul tema: "l'infinito in didattica della matematica": *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.
- D'Amore, B. (1997b), Matite – Orettole – Przetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione?:

- L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* (in via di pubblicazione).
- D'Amore, B. (2001), Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution, *Scientia Paedagogica Experimentalis* 38-2, 143-168.
- Duval, R. (1983), L'ostacle du dedoublement des objects mathématiques: *Educational Studies in Mathematics*, 14, 385-414.
- Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.
- Duval, R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique: *Repres IREM*, 17, ottobre.
- Duval, R. (1994), Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage: *Actes de la Quarantesixieme Rencountre Internationale de la CIEAEM* (in via di pubblicazione).
- Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Lang, Paris.
- Duval, R. (1997), La compréhension des énoncés de problème de mathématisation: de la lecture à la résolution: D'Amore, B. & Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 25-46, Thessaloniki.
- Engestroem, Y. (1990), When is a tool? Multiple meanings of artifacts in human activity, in *Learning, working and imagining: twelve studies in activity theory*, Orienta-Konsultit Oy, Helsinki, 171-195.
- Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni. L. (a cura di), UTET, Torino.
- Ferro, R. (1993), La Teoria degli Insiemi, p. II, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16, 11-12, 1077-1099.
- Fiori, C. & Pellegrino, C. (1997), Immagine della matematica tra concezione e divulgazione: *La matematica e la sua didattica*, 4, 426-443.
- Fischbein, E. & Vergnaud, G. (1992), *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, D'Amore, B. (a cura di), Pitagora, Bologna.
- Fischbein, E. (1983), Intuition and proof: *For the Learning of Mathematics*, 3, 2, 9-24 (Intuizione e dimostrazione: Fischbein, E. & Vergnaud, G., 1992, *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*, Pitagora, Bologna, 1-24).
- Fischbein, E. (1985), Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari: Chini Artusi, L. (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli, Bologna, 122-132.
- Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Riedel, Dodrecht.
- Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht.

- Furinghetti, F. (1992), Luci ed ombre dell'approccio "intuitivo": Furinghetti, F. (ed.), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del II Internucleo della Scuola superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 83-96.
- Furinghetti, F. (1993), Images of Mathematics outside the community of mathematicians: evidence and explanations: *For the Learning of Mathematics*, 13, 2, 33-38.
- Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.
- Godino, J. & Batanero, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.
- Hardy, G.H. & Wright, E.M. (1938), *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford (quinta edizione, 1979).
- Johnson-Laird, P.N. & Byrne, R.M.J. (1990), *Deduction*, Erlbaum, Hillsdale.
- Johnson-Laird, P.N. (1988), *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna (prima edizione originale: 1983).
- Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3ème cycle, Université Paris 7, Paris.
- Kaldrimidou, M. (1995), Lo status della visualizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 2, 181-194.
- Kaput, J.J. (1993), The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience, Bieler, R.; Scholz, R.W., Strasser, R. & Winkelmann, B. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 379-397, Kluwer, Dordrecht.
- Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico. I. Dall'Antichità al Settecento. II. Dal Settecento a oggi*, Einaudi, Torino.
- Kosslyn, S.M. (1989), *Le immagini della mente*, Giunti, Firenze 1989 (prima edizione originale: 1983).
- Lakoff, G. & Núñez, R. (2000), *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.
- Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M.G., Boero, P., Ferri, F. & Garuti, R. (1997), Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of PME-21*, Lathi, Finland, I, 180-195.
- Mariotti, M.A. (2005), *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e l'apprendimento della geometria*, Pitagora, Bologna.
- Martizloff, J.-C. (1987), *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris.
- Needham, J. (1959), *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press.

- Paivio, A. (1986), *Mental representation: a dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford.
- Pellerey, M. & Orio, F. (1996), La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica: *ISRE*, 2, 52-73.
- Penco, C. (2004), *Introduzione alla filosofia del linguaggio*, Laterza, Roma-Bari.
- Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, I-II, Feltrinelli, Milano.
- Presmeg, N.C. (1986), Visualization and mathematical giftedness: *Educational studies in mathematics*, 17, 297-311.
- Rabardel, P. (1995), *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*, A. Colin, Paris.
- Radford, L. (2002), The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge, *For the Learning of Mathematics*, 22 (2), 14-23.
- Radford, L. (2003), Gestures, speech and the sprouting of signs, *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Ribenboim, P. (1980), *The Book of Prime Number Records*, Springer Verlag, New York (seconda edizione, 1989).
- Schoenfeld, A.H. (1986), On having and using Geometric knowledge: Hiebert, J. (a cura di), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, 225-263, Erlbaum, Hillsdale.
- Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Shama, G. & Dreyfus, T. (1991), Spontaneous strategies for visually presented linear programming problems: Furinghetti, F. (ed.), *Proceedings of PME XV*, Assisi, 3, 262-270.
- Shepard, R.N. (1980), *Internal representations: studies in perception imagery and cognition*, Bradford, Montgomery.
- Steinbring, H.: 2002, What makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction, *Paper presented to the Discussion Group on Semiotics at the 26th PME*
- Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity: *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.
- Tall, D. (1980), The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of the infinity: *Educational Studies in Mathematics*, 11, 271-284.
- Tall, D. (1985), Understanding the Calculus: *Mathematical Teaching*, 110, 49-53.
- Tsamir, P. & Tirosh, D. (1992), Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity: *PME XVI*, 90-97, Durham.

- Vergnaud, G. (1985), Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche: Chini Artusi, L. (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli-UMI, Bologna, 20-45.
- Vergnaud, G. (1992), La teoria dei campi concettuali: *La matematica e la sua didattica*, VI, 1, 4-19.
- Vergnaud, G. (1994), *Il bambino, la matematica e la realtà*, Armando, Roma (edizione originale: Lang, Berne 1981).
- Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics: Harel, G. & Dubinsky, E. (a cura di), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213.
- Vygotskij, L.S. (1974), *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti*, Giunti, Firenze.
- Vygotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino.
- Vygotsky, L.S. (1962), *Thought and Language*, MIT Press, Cambridge.
- Waldegg, G. (1993), La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction: *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 5, 19-36.
- Wartofsky, M.: (1979), Perception, representation and the forms of action: towards an historical epistemology, *Models. Representation and the scientific understanding*, Reidel Publishing Company, 188-209.
- Wittgenstein, L. (1982), *Lezioni sui fondamenti della matematica*, Boringhieri, Torino.
- Wittgenstein, L. (1999), *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino.
- Zan, R. (1991-1992), I modelli concettuali di problema nei bambini della scuola elementare: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 14 (7, 9), 659-677; 15 (1), 39-53.
- Zan, R. (1995), Chi non riesce in matematica?: D'Amore, B. (a cura di), *Insegnare ad apprendere la matematica in aula: situazioni e prospettive*, Atti del IX Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica", Castel San Pietro Terme, Pitagora, Bologna, 77-83.

Capitolo 4

Il contratto didattico

4.1. CONTRATTO E CLAUSOLE

4.1.1. Un contratto mai firmato

Il rapporto tra l'insegnante e l'allievo, quel ricco e delicato complesso di interazioni, di comportamenti che deve (o che dovrebbe) avere quale prodotto finale l'apprendimento, è costituito da atteggiamenti, da richieste, da risposte, da un insieme di fasi e di momenti che si influenzano vicendevolmente e che sembrano ripetersi giorno dopo giorno, mese dopo mese.

Spesso, nella nostra attività di insegnanti, ci è capitato di basare il nostro rapporto con gli allievi su regole non scritte, su convenzioni implicite che vengono accettate continuamente e spontaneamente sia dal docente che dal discente. Anzi, talvolta sembra quasi che queste (mai dichiarate) norme di comportamento siano perfettamente conosciute da entrambe le parti in gioco, come se costituissero una sorta di contratto la cui validità sia indiscutibilmente nota e chiara per tutti. Un contratto mai firmato, ma non per questo meno importante, tale da influenzare, anche in termini decisivi, l'insegnamento e l'apprendimento.

Un esempio può introdurre la questione: l'insegnante è solito dedicare la prima ora del martedì ad alcune interrogazioni; dunque ogni martedì egli entra in classe, chiama (uno dopo l'altro) quattro allievi e propone a ciascuno di essi un esercizio. Lo studente chiamato lascia il proprio banco, si avvicina alla lavagna e cerca di risolvere l'esercizio proposto. Se l'esercizio sarà risolto correttamente, ovvero se lo studente riuscirà a determinare il risultato finale esatto, l'insegnante annoterà una valutazione positiva sul proprio registro; nel caso di fallimento, invece, l'insegnante scriverà sul registro una nota negativa. Tutto chiaro, tutto previsto. L'insegnante non perderà tempo a spiegare, ogni martedì, il funzionamento della prova, le "regole del gioco" (o del "contratto"). Lo studente chiamato, una volta che si troverà di fronte alla lavagna alle prese con un esercizio, non chiederà all'insegnante informazioni sul da farsi. Solo così le faticose parole, su quel temibile registro, saranno positive; e dunque solo così egli si incamminerà verso l'agognato successo. Tutto secondo copione. Tutto secondo "contratto".

Già nel 1973 J. Filloux ipotizzò la presenza di un *contratto pedagogico* tale da collegare e da influenzare reciprocamente i comportamenti dell'insegnante e dell'allievo (Filloux, 1973). Nel 1986 G. Brousseau perfezionò questa idea, inizialmente incentrata sulla dimensione sociale, e la arricchì con la considerazione degli aspetti cognitivi: nacque così il *contratto didattico*.

Il contratto didattico secondo Brousseau è «l'insieme dei comportamenti dell'insegnante che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dall'insegnante» (Brousseau, 1986).

Come potremo ampiamente constatare, il contratto didattico influenza molti comportamenti dell'allievo, e di ciò l'insegnante non può non tenere conto. Già nell'esempio precedente abbiamo accennato ad implicite attese, da parte degli studenti, basate sulla *ripetizione delle modalità* (D'Amore & Frabboni, 1996, pp. 100-101): *ogni* martedì interrogazione, *ogni* volta quattro interrogati, *ogni* interrogato un esercizio da risolvere etc.

Ma c'è di più. Proseguiamo con un esempio che riprenderemo spesso in seguito: l'uso spesso maldestro di un linguaggio apparentemente rigoroso (oppure soltanto altisonante) da parte dell'allievo può essere determinato dal tentativo, magari non sempre del tutto consapevole, di imitare il linguaggio impiegato dall'insegnante nelle spiegazioni o di utilizzare, in qualche modo, la terminologia presente nel libro di testo: così facendo, l'allievo potrebbe forse illudersi di ottenere l'approvazione dell'insegnante e dunque di raggiungere una valutazione positiva, o comunque generosa. Nascono in questo modo strani miscugli di termini, di formule, di parole senza senso: ed è importante sottolineare che queste sventurate accozzaglie pseudo-linguistiche sono spesso *del tutto* prive di significato, sia dal punto di vista formale che da quello sostanziale. Ovvero, esse non possono essere in alcun modo utili all'apprendimento: forse il nostro studente, se potesse sentirsi libero di esprimersi in termini informali, sarebbe in grado di orientarsi nell'argomento proposto, di “capirci qualcosa”...¹.

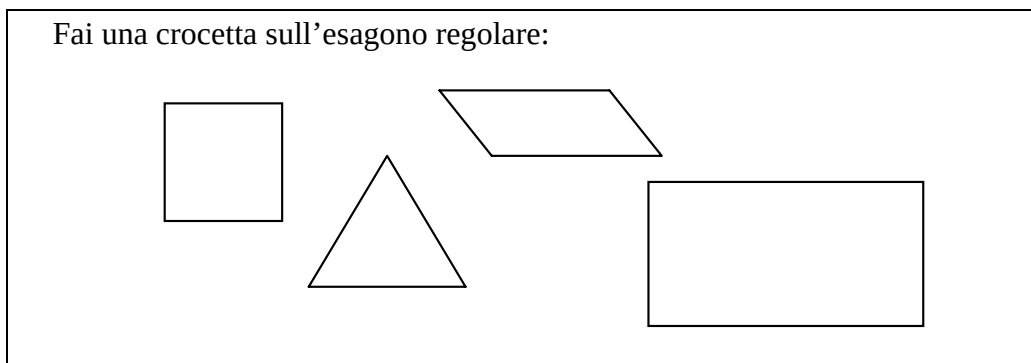
4.2.2. Un risultato per ogni esercizio

Come abbiamo sopra ricordato, spesso le prove di valutazione (sia scritte che orali) sono basate su richieste del tipo: *determina il risultato del problema seguente*. Il risultato da trovare può essere un numero, una formula, un diagramma cartesiano etc. L'esito della prova dipende dunque dalla correttezza di questo risultato: se “il risultato è giusto”, allora “il compito è andato bene”.

¹ Con ciò non intendiamo ovviamente negare l'importanza dell'uso di un linguaggio corretto e rigoroso, anche dal punto di vista formale! Si tratta di equilibrare le esigenze: da un lato la comprensione del concetto, dall'altro la sua espressione formalmente corretta. Torneremo su questo argomento nel capitolo 5.

In questo e nel prossimo paragrafo potremo constatare che il risultato finale è un protagonista di primo piano del contratto didattico.

Per introdurre la questione, abbandoniamo per qualche attimo la scuola secondaria superiore e presentiamo brevemente il seguente “test dell’esagono” (D’Amore & Sandri, 1993), recentemente proposto ad allievi di 12-13 anni (ma analoghi fenomeni possono collegarsi a tutti i livelli scolastici):



Moltissimi allievi (nonostante sapessero benissimo che cos’è un esagono regolare!) hanno interpretato come assolutamente coercitiva la richiesta ed hanno dato *comunque* una risposta al test: hanno cioè indicato varie figure, in particolare quelle che più “assomigliano” all’esagono (spesso il triangolo equilatero e il parallelogramma).

Come possiamo interpretare questi risultati, apparentemente sconcertanti?

Seguiamo le considerazioni di B. D’Amore e di P. Sandri: una semplice *analisi tecnica* porterebbe inevitabilmente a concludere che gli allievi *non sanno che cos’è l’esagono regolare*. Eppure la grande maggioranza dei ragazzi, successivamente interpellata, è stata in grado di dare una definizione accettabile di esagono regolare, e spesso anche di tracciarne un disegno corretto.

La sola analisi tecnica, dunque, si rivela nettamente insufficiente, addirittura fuorviante. È invece necessaria un’*analisi didattica* tale da mettere in luce il ruolo decisivo del contratto didattico: esso infatti spinge l’allievo a dare *comunque* una risposta al problema proposto. Insomma, nella mente degli studenti è radicata l’implicazione (auspicabile, per quanto riguarda l’esito finale!):

<i>io indico la risposta esatta</i>	$\Rightarrow$	<i>l’insegnante valuta positivamente il mio elaborato</i>
-------------------------------------	---------------	---

evidentemente abbinata alla temibile:

<i>io non indico la risposta esatta (cioè: scrivo la risposta sbagliata oppure non svolgo l'esercizio)</i>	$\Rightarrow$	<i>l'insegnante valuta negativamente il mio elaborato</i>
--	---------------	---

Da qui nasce l'imperativo categorico: *primo, risolvere (sempre e comunque) l'esercizio!* Ma quegli allievi, chiaramente, non sono abituati ad affrontare esercizi e problemi impossibili: il contratto didattico, indotto dalla precedente esperienza scolastica dello studente, prevede che ogni prova proposta abbia una (spesso: una sola!) soluzione (Baruk, 1985; inoltre: D'Amore, 1993a e 1993b e 1999).

4.2.3. La giustificazione formale

Abbiamo potuto constatare che, nell'ambito del contratto didattico, la stessa concezione della scuola influenza evidentemente (e a volte in maniera decisiva) il comportamento dell'allievo, ad esempio nei confronti del risultato finale: lo studente sa che è importante raggiungere il "risultato giusto" (cosa che automaticamente porterà al voto positivo e alla promozione) e cerca comunque di fare ciò, anche quando l'esercizio in questione non ammette un (o: un solo) "risultato giusto".

Altrettanto interessante è l'atteggiamento di alcuni allievi relativamente alla concezione della stessa matematica. Spesso infatti alla materia "matematica" sono associate immagini di calcoli, di figure geometriche tracciate secondo regole ben precise, di formule, di simboli speciali: un elaborato di matematica, anche ad una prima, superficiale occhiata, si presenta in modo ben diverso da una prova scritta relativa ad una materia letteraria (il "tema", la versione di latino etc.)!

Una delle clausole spesso pericolosamente vincolanti del contratto didattico riguarda l'"esigenza della giustificazione formale". Se un esercizio viene risolto senza i calcoli tradizionali... manca qualcosa. Non è neppure il caso di sottolineare che tutto ciò può essere causa di notevoli difficoltà e di ostacoli per un corretto e proficuo apprendimento.

Una buona terapia può consistere nell'uso di opportuni esempi (ovvero controesempi): i nostri allievi capiranno che si fa matematica anche quando si usa la testa senza necessariamente riempire foglio di carta (rigorosamente a quadretti) con formule, calcoli e disegni convenzionali.

4.2. L'EFFETTO *EINSTELLUNG*

4.2.1. Ripetiamo lo stesso esercizio: ma... serve?

Spesso, per consolidare l'abilità degli allievi nell'applicazione di un procedimento, si ritiene utile far ripetere molte volte lo stesso esercizio, ovvero esercizi molto simili, tali da presentare le stesse difficoltà e da essere risolti mediante lo stesso metodo.

Tutto ciò è effettivamente utile? La questione è piuttosto delicata. Da un lato, sembra che la risposta non possa che essere positiva: l'esperienza scolastica quotidiana sembra suggerire senza alcun dubbio che l'abilità richiede allenamento. Dunque se desideriamo che i nostri allievi raggiungano un'apprezzabile padronanza nella risoluzione, ad esempio, delle divisioni, appare indispensabile che essi risolvano, una dopo l'altra, numerose divisioni: solo così potranno raggiungere una buona familiarità con le varie situazioni, con le difficoltà che si possono presentare nel corso della risoluzione di quell'esercizio.

Eppure la ripetizione dello stesso procedimento risolutivo non porta sempre e soltanto vantaggi. A volte un'abilità tecnica si associa ad una qualche forma di "maccanicità". A volte certi studenti, abili nella risoluzione di un certo esercizio mediante alcune "regole" sintetizzate da formule ben note, finiscono per applicare tali formule anche quando ciò non risulta necessario. Anzi: essi applicano le formule studiate nonostante ciò comporti un'evidente complicazione del procedimento risolutivo!

Che cos'è accaduto? Forse l'abitudine ha giocato un brutto scherzo ai nostri studenti... Ma liquidare il fenomeno con un semplicistico "erano abituati a fare così" significa banalizzare la questione. È necessario esaminare la situazione più profondamente: sembra infatti che molti studenti siano stati quasi "imprigionati" dalla propria abilità nell'applicare un ben determinato metodo risolutivo, tanto da non voler cercare altri procedimenti, da rifiutare di esaminare autonomamente, con la sufficiente libertà, il problema proposto. Insomma, sembra che l'allievo pensi: si tratta di un esercizio così e così? Bene, ne ho già risolti molti altre applicando le mie formulette: tutto era andato bene allora, dunque riapplicherò le mie belle formulette e tutto andrà certamente bene anche adesso!

Non possiamo pretendere che i nostri allievi raggiungano livelli ottimali di abilità nella risoluzione di un ben determinato esercizio affrontando soltanto un esempio di tale esercizio. Non basta, ovviamente. Ma la ripetizione esagerata, ossessiva, acritica non è positiva, può addirittura essere dannosa: è necessario anche proporre variazioni, casi particolari, esempi nuovi e interessanti (magari

semplici, o comunque suscettibili di risoluzioni elementari) che possano stimolare la creatività dell'allievo. Solo così potremo aggirare le trappole di quello che viene chiamato effetto *Einstellung*.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO 4

- Bagni, G.T. (1996), Disequazioni irrazionali quadratiche: apprendimento e “contratto didattico”: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19B, 2, 167-176 (Bagni, G.T., 1996, Irrational inequations: learning and didactical contract: Gagatsis, A. & Rogers, L., a cura di, *Didactics and History of Mathematics*, Erasmus ICP-95-G-2011/11, 133-140, Thessaloniki).
- Bagni, G.T. (1997a), Trigonometric functions: learning and *didactical contract*: D'Amore, B. & Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 3-10, Thessaloniki (è in via di pubblicazione in italiano: Bagni, G.T., 1997, Le funzioni goniometriche: apprendimento e *contratto didattico* nella scuola secondaria superiore: *Bollettino dei Docenti di Matematica del Canton Ticino*).
- Bagni, G.T. (1997b), “Ma un passaggio non è il risultato...”. L'introduzione dei numeri immaginari nella scuola superiore: *La matematica e la sua didattica*, 2, 187-201.
- Bagni, G.T. (1997c), Dominio di una funzione, numeri reali e numeri complessi. Esercizi standard e *contratto didattico* nella scuola superiore: *La matematica e la sua didattica*, 3, 306-319.
- Bara, B. (1990), *Scienza cognitiva*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Barth, B.-M. (1990), *L'apprendimento dell'astrazione*, La Scuola, Brescia (prima edizione: Paris, 1987).
- Baruk, S. (1985), *L'âge du capitain*, Seuil, Paris.
- Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano.
- Brousseau, G. (1986), Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2, 33-115.
- Buswell, G.T. (1927), *Summary of arithmetical investigations*, University of Chicago Press, Chicago.
- Buswell, G.T. (1930), A critical survey of previous research in arithmetics: Whipple, G.M. (ed.), *The twenty-ninth yearbook of the National Society for the Study of Education: Report of the Society's committee on arithmetic*, Publishing of Public School, Bloomington.
- Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

- D'Amore, B. (1992), L'insegnamento della matematica offende le intelligenze?: *Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza*, Pitagora, Bologna.
- D'Amore, B. (1993a), *Problemi*, Angeli, Milano.
- D'Amore, B. (1993b), Il problema del pastore, *La vita scolastica*, 2, 14-16.
- D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.
- D'Amore, B. & Sandri, P. (1993), Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili: *La matematica e la sua didattica*, 3, 348-353.
- Davydov, V.V. (1979), *Gli aspetti della generalizzazione nell'insegnamento*, Giunti-Barbèra, Firenze (prima edizione: Moskow 1972).
- De La Garanderie, A. (1980), *Les profils pédagogiques*, Le Centurion, Paris.
- Duncker, K. (1969), *La psicologia del pensiero produttivo*, Giunti-Barbera, Firenze (prima edizione: 1935).
- Filloux, J. (1973), Positions de l'enseignant et de l'enseigné: *Fantasme et formation*, Dunod, Paris.
- Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Riedel, Dodrecht.
- Fischbein, E. & Vergnaud, G. (1992), *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, D'Amore, B. (a cura di), Pitagora, Bologna.
- Gagné, R.M. (1973), *Le condizioni dell'apprendimento*, Armando, Roma (prima edizione: 1970).
- Giordan, A. & De Vecchi, G. (1987), *Les origines du savoir*, Delachaux et Niestlé, Genève.
- Johnson-Laird, P.N. (1988), *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna (prima edizione originale: 1983).
- Johnson-Laird, P.N. & Byrne, R.M.J. (1990), *Deduction*, Erlbaum, Hillsdale.
- Kahneman, D.; Slovic, P. & Tversky, A. (1982), *Judgement under uncertainty, heuristic and biases*, Cambridge University Press, New York.
- Kleinmuntz, B. (1976), *Problem solving. Ricerche, modelli, teoria*, Armando, Roma.
- Kosslyn, S.M. (1989), *Le immagini della mente*, Giunti, Firenze 1989 (prima edizione originale: 1983).
- Luchins, A.S. (1942), Mechanization in problem solving. The effect of Einstellung: *Psychol. Monogr.*, 54.
- Meirieu, P. (1987), *Apprendre... oui, mais comment?*, ESF, Paris.
- Nesher, P. & Kilpatrick, J. (a cura di) (1990), *Cognition and mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Paivio, A. (1986), *Mental representation: a dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford.
- Piaget, J. (1980), *Experiments in contradictions*, Chicago, The University of Chicago Press.
- Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, I-II, Feltrinelli, Milano.

- Polya, G. (1983), *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli, Milano (edizione originale: 1945).
- Resnick, L.B. & Ford, W.W. (1991), *Picologia della matematica ed apprendimento scolastico*, Sei, Torino (prima edizione: 1981).
- Rogers, L. (1997), *Problem Solving ed "Indagini" nei corsi di matematica. Alcuni esempi dalle scuole britanniche*, Sulmona (in via di pubblicazione).
- Schoenfeld, A. (1985), *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.
- Shepard, R.N. (1980), *Internal representations: studies in perception imagery and cognition*, Bradford, Montgomery.
- Thorndike, E.L. (1913), *Educational psychology, II. Psychology of learning*, Teachers College, Columbia University, New York.
- Vigotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1978).
- Wertheimer, H. (1959), *Productive Thinking*, Harper & Row, New York.

Capitolo 5

Ostacoli e apprendimento

5.1. TIPI DI OSTACOLI

5.1.1. Ostacoli e fallimenti

Sappiamo bene che l'apprendimento della matematica non è sempre lineare, semplice e indolore. Insomma, non sempre lo studente riesce a realizzare gli obiettivi didattici ed educativi connessi alla matematica: talvolta (spesso?) i nostri allievi “non capiscono”, riescono soltanto in parte a raggiungere i livelli di apprendimento sperati o programmati.

La matematica, tradizionalmente, è considerata una materia “difficile”. Proprio per questa ragione, molto spesso, la matematica “fa paura”.

Perché accade ciò? Da che cosa dipendono le interruzioni, i blocchi improvvisi, i fallimenti nell'apprendimento della matematica? Quali elementi rendono difficoltosa (talvolta apparentemente quasi impossibile) la “crescita matematica” di uno studente della scuola secondaria superiore?

Evidentemente non è semplice rispondere in modo adeguato e completo a queste domande. Come vedremo, molti importanti elementi, alcuni dei quali già sfiorati nei capitoli precedenti, concorrono a costituire la tradizionale, temuta (inevitabile?) difficoltà che accompagna la matematica.

Bisogna innanzitutto considerare che i presunti ostacoli collegati all'apprendimento della matematica sono spesso rilevati mediante prove oggettive di valutazione, come la risoluzione di problemi e di esercizi nel corso di interrogazioni o di prove scritte¹. E, frequentemente, eventuali fallimenti in queste prove sono determinati da elementi che possono anche essere in parte o del tutto estranei all'effettiva comprensione dei contenuti matematici in esame.

¹ Ricordiamo che, nel caso della risoluzione di problemi, il fallimento può avvenire nelle fasi seguenti (D'Amore, 1993a):

- ❶ *Lettura del testo.*
- ❷ *Comprensione (traduzione) del testo.*
- ❸ *Trasformazione del testo in modelli (grafici etc.).*
- ❹ *Applicazione della tecnica risolutiva (aritmetica etc.).*
- ❺ *Codificazione della risposta.*

Secondo la *tesi di Clemens*, il fallimento avviene molto spesso nelle fasi ❶, ❷, ❸ (Clemens, 1980).

Ad esempio, ogni insegnante sa bene che un fallimento (anche pesante) in una prova scritta di matematica può essere determinato da diverse componenti emotive, da elementi caratteriali, o addirittura da condizioni esterne all'allievo (Gagné, 1973)².

Senza con ciò trascurare l'importanza di tali componenti, in questo capitolo ci occuperemo particolarmente delle questioni collegate in modo specifico all'apprendimento dei contenuti matematici.

5.1.2. Gli ostacoli: una prima classificazione

Per affrontare proficuamente l'argomento in questione, riteniamo opportuno classificare innanzitutto gli ostacoli che possono rendere arduo il superamento delle difficoltà nell'apprendimento della matematica.

A tale proposito, seguiamo la classificazione di G. Brousseau (faremo dunque riferimento a: Brousseau, 1983, come ricordato in: D'Amore, 1993a), il quale individua:

❶ *Ostacoli di origine ontogenetica*. Si tratta di ostacoli che dipendono dai limiti neuro-fisiologici dell'allievo. Ogni insegnante sa che di fronte a sé non vengono a trovarsi studenti "ideali", pressoché perfetti, bensì ragazzi in carne ed ossa, talvolta limitati, insicuri: queste caratteristiche possono influenzare (negativamente) il rendimento scolastico (Pontecorvo, 1981).

❷ *Ostacoli di origine didattica*. Dipendono dal sistema educativo adottato, dalle scelte operate dall'insegnante: dunque proprio l'insegnante può operare in termini decisivi per limitare l'influenza di questo genere di ostacoli.

❸ *Ostacoli di natura epistemologica*. Dipendono dalla natura della disciplina (e sono, dunque, inevitabili). Inutile illudersi: alcuni contenuti matematici *non* sono banali, *non* sono immediatamente comprensibili. Se, da un lato, è assurdo che l'allievo "rinunci in partenza", che finisca per trincerarsi dietro ad un "io non ce la farò mai a capire questa roba" (atteggiamento, purtroppo, non del tutto infrequente), d'altro canto è sciocco e controproducente presentare tutta la matematica come un elementare e divertente giochetto. *Non è così*. La matematica è bella, certo; e vale davvero la pena di impegnarsi a fondo per comprendere la sua eleganza. Ma non sempre la matematica è "facile" (si veda anche: Glaeser, 1984).

² Con ciò si intende ad esempio: stimoli (fisici, verbali, non-verbali, iconici...), condizioni ambientali (rumore, temperatura, pressione, luce...), esplicite direttive verbali da parte dell'insegnante, altre istruzioni (informazioni sulla natura delle soluzioni richieste, sulle regole da impiegare, sul processo da seguire...) (Gagné, 1973; D'Amore, 1993a).

La classificazione di Brousseau merita di essere discussa per le non banali implicazioni epistemologiche che comporta; ma può essere adottata, almeno in prima approssimazione, per la sua evidente chiarezza.

In questo lavoro ci occuperemo principalmente degli ostacoli di origine didattica. In particolare, esamineremo gli ostacoli dipendenti dal linguaggio nell'apprendimento di alcuni argomenti di matematica.

5.2. OSTACOLI E LINGUAGGIO

5.2.1. Leggibilità

Le nostre lezioni, i testi dei problemi, le domande che proponiamo ai nostri allievi durante le prove orali sono in gran parte espressi mediante frasi, mediante parole, termini tratti dal linguaggio naturale e dal cosiddetto linguaggio matematico. Una delle principali questioni che, in qualità di insegnanti, dobbiamo (continuamente) affrontare è dunque la seguente: siamo davvero sicuri che il nostro interlocutore (l'allievo) sia in grado di comprendere il nostro messaggio (ad esempio: la domanda posta, il testo dell'esercizio, l'enunciato del problema, il contenuto delle nostre spiegazioni)?

Si tratta evidentemente di un argomento molto delicato, che non ci illudiamo di poter trattare completamente in poche pagine: ma, considerata la sua importanza, cercheremo di fornire al lettore lo spunto per qualche riflessione ed alcune indicazioni per ulteriori approfondimenti.

Esaminiamo innanzitutto il complesso problema della comprensibilità di un testo scritto.

Un'osservazione di A. Gagatsis sottolinea l'importanza della lettura di un testo matematico:

«La lettura è superiore in efficacia rispetto agli altri mezzi di informazione. Il lettore può sempre tornare sul suo testo per approfondirne progressivamente il contenuto (per esempio in matematica), cosa che non si potrebbe fare ascoltando la radio. D'altra parte, si sa che la lettura permette di comprendere un messaggio circa 3 volte più velocemente rispetto al semplice ascolto (27000 parole lette ogni ora, contro 9000 parole ascoltate)» (Gagatsis, 1995).

Ma è (sempre) semplice leggere e comprendere un testo in generale, e un testo matematico in particolare?

Per dare un'idea al lettore di come è possibile valutare la "facilità" di un testo, proponiamo la *formula di leggibilità di R. Flesh* (originariamente

elaborata per la lingua inglese, adattata al francese da L. Kaudel e A. Moles ed al greco: Gagatsis, 1995). La *facilità* di un testo può essere espressa dalla quantità seguente:

$$206,85 - 0,59x - 1,015y$$

con: x = numero di sillabe per 100 parole

y = numero di parole per frase

Indicando con p il numero di parole, con s il numero di sillabe e con f il numero di frasi, otteniamo per la facilità:

$$206,85 - \frac{s \cdot 100}{p} \cdot 0,59 - \frac{p}{f} \cdot 1,015$$

Va sottolineato che la formula ora ricordata è costruita per testi letterari; la sua applicazione a testi matematici può dunque essere difficoltosa. Ma è interessante indicare qualche esempio.

Consideriamo il testo A:

«Nei primi decenni del Duecento la diffusione in Europa dei risultati matematici arabi ed indiani è uno dei più importanti elementi di rinascita della matematica occidentale. La figura di maggior rilievo in ambito europeo è Leonardo da Pisa detto Fibonacci. Figlio di un funzionario pisano, Leonardo viaggia molto; egli ha quindi la possibilità di entrare in contatto con le tradizioni culturali straniere. Pubblica il *Liber Abaci*, opera fondamentale per la storia della matematica. La fortuna dei manuali di matematica, in particolare di quelli di aritmetica pratica, risale dunque ad alcuni secoli prima dell'introduzione della stampa a caratteri mobili».

In questo caso, abbiamo:

$$p = 99$$

$$s = 247$$

$$f = 6$$

e dunque la facilità del testo (A) è: $206,85 - \frac{s \cdot 100}{p} \cdot 0,59 - \frac{p}{f} \cdot 1,015 = 42,9$.

Consideriamo il testo B:

«La Didattica della Matematica si colloca sempre in un contesto sociale, all'interno di alcuni tipi di strutture istituzionali, dove una parola chiave che

caratterizza la situazione è *umanizzazione*. La Matematica è intesa come una disciplina specificamente benevola, non caratterizzata da severità e intolleranza, ma dall'apertura verso un ampio spettro di approcci. Ci si focalizza sugli studenti come singoli, con il loro personale sviluppo, con le loro necessità, ma anche sulle relazioni tra coloro che professionalmente intervengono nella Didattica della Matematica. I procedimenti matematici sono considerati molto più dei prodotti matematici, non richiedendo specifici obiettivi».

In questo secondo caso, abbiamo:

$$p = 96 \qquad s = 253 \qquad f = 4$$

e dunque la facilità del testo (B) è: $206,85 - \frac{s \cdot 100}{p} \cdot 0,59 - \frac{p}{f} \cdot 1,015 = 27,0$.

Possiamo quindi concludere che (limitatamente all'analisi condotta mediante la formula di Flesh, sopra ricordata), il testo (A) risulta più "leggibile" del testo (B)³.

5.2.2. Variabili redazionali

Le formule di leggibilità sono però riferite esclusivamente all'aspetto formale; esse forniscono indicazioni certamente interessanti, ma che non possono essere considerate esaustive. In altri termini, non è sufficiente che un testo abbia un elevato indice di leggibilità, ad esempio secondo la formula di Flesh, affinché tale testo possa essere considerato chiaro e didatticamente efficace. Per stabilire se un testo matematico (ad esempio l'enunciato di un problema) è davvero comprensibile, dobbiamo evidentemente condurre un attento esame critico anche dei suoi contenuti (Goldin & Caldwell, 1979; Webb, 1979).

A tale proposito, C. Laborde ha proposto le seguenti *variabili redazionali* da valutare nell'enunciato di un problema:

- ❶ Grado di esplicitazione ottenuto dall'impaginazione, dalla punteggiatura e dalle strutture sintattiche impiegate.
- ❷ Complessità sintattica.
- ❸ Densità dell'enunciato.

³ In effetti, il testo (A) è tratto da una pubblicazione destinata a studenti della scuola secondaria, il testo (B) da un articolo specialistico in didattica della matematica.

- ④ Ordine delle informazioni fornite.
- ⑤ Differenza tra la forma in cui le informazioni sono date e quella in cui le si deve trattare nella risoluzione.
- ⑥ Grado di esplicitazione degli oggetti intermedi utili alla risoluzione del problema (Laborde, 1995).

Analizziamo ora, seguendo l'impostazione di Laborde, il semplice testo seguente:

Calcolare il rapporto delle altezze di due rettangoli equivalenti con le basi rispettivamente di 12 cm e di 15 cm.

L'enunciato di questo problema appare sintetico, ben posto: ma è davvero chiaro? È didatticamente efficace?

Prima di rispondere dovremmo dare un'esauriente definizione di questa "efficacia didattica" (e vedremo tra poco che una tale definizione è tutt'altro che scontata). Possiamo però esaminare punto per punto le variabili redazionali:

① La punteggiatura non è utilizzata. Il citato "rapporto delle altezze" potrebbe essere riferito ad entrambe le situazioni:

altezza maggiore : altezza minore altezza minore : altezza maggiore

e ciò può essere causa di perplessità.

② L'enunciato appare complesso: è costituito da un solo periodo, con una proposizione subordinata. Il termine "rispettivamente" richiede attenzione da parte dell'allievo.

③ L'enunciato (appena di due righe) appare piuttosto denso.

④ La domanda è posta all'inizio.

⑤ Le informazioni sono date nell'ordine inverso rispetto a quello in cui esse possono essere trattate, ad esempio, in una risoluzione del tipo:

altezza A = area A : base A = area A : 12 cm

altezza B = area B : base B = area B : 15 cm

(essendo area A = area B) altezza A : altezza B =

$$= (\text{area A} : 12 \text{ cm}) : (\text{area B} : 15 \text{ cm}) = 15 : 12 = 5/4$$

⑥ L'informazione relativa al passaggio fondamentale (l'uguaglianza delle aree) è appena accennata ed è celata nel termine "equivalente".

Non possiamo certo dire che la situazione delle variabili redazionali così rilevata sia tale da favorire la comprensione e da agevolare la risoluzione da parte dell'allievo. Proviamo dunque a "migliorare le cose", ovvero a riscrivere l'enunciato del problema assegnato nel modo seguente (Bagni & Giovannoni, 1996):

*Il rettangolo A ha la base di 12 cm; il rettangolo B ha la base di 15 cm. L'area del rettangolo A è uguale all'area del rettangolo B.
Calcolare il rapporto tra l'altezza del rettangolo A e l'altezza del rettangolo B.*

Esaminiamo nuovamente il testo secondo l'impostazione di Laborde:

- ① La punteggiatura è utilizzata. Il "rapporto delle altezze" richiesto viene indicato esplicitamente.
- ② L'enunciato, ora costituito da quattro proposizioni distinte, appare meno complesso. Non compare il (pericoloso) termine "rispettivamente".
- ③ L'enunciato (di cinque righe) è lungo, ma non è particolarmente denso.
- ④ La domanda è posta alla fine ed è chiaramente evidenziata (si va addirittura a capo).
- ⑤ Le informazioni sono date nell'ordine in cui possono essere trattate nella risoluzione (accennata al precedente punto ⑤).
- ⑥ L'informazione relativa al passaggio fondamentale (l'uguaglianza delle aree) è ora ben evidenziata.

Dobbiamo dunque concludere che il testo del problema, così riformulato, è "migliore" del testo precedente? No, non possiamo affermarlo, in quanto non esiste, in assoluto, *un* criterio per stabilire quando un testo sia da considerare "migliore" di un altro. Se per "migliore" intendiamo più comprensibile, più "facile", allora riteniamo che il testo riformulato debba essere preferito a quello originale; *ma non è detto che sia così*: ad esempio, è possibile che l'insegnante abbia voluto proporre il testo meno "facile" proprio per saggiare, negli allievi, la capacità di interpretare un testo impegnativo.

È tuttavia importante sottolineare che gli ostacoli connessi alla lettura e all'interpretazione del testo costituiscono un aspetto fondamentale di un problema, un elemento spesso decisivo a proposito della sua difficoltà. Dunque, i due problemi espressi da:

Calcolare il rapporto delle altezze di due rettangoli equivalenti con le basi rispettivamente di 12 cm e di 15 cm.

*Il rettangolo A ha la base di 12 cm; il rettangolo B ha la base di 15 cm. L'area del rettangolo A è uguale all'area del rettangolo B.
Calcolare il rapporto tra l'altezza del rettangolo A e l'altezza del rettangolo B.*

hanno forse la stessa risoluzione, ma *non* la stessa difficoltà. *Non* sono lo stesso problema⁴.

5.2.3. La delicata questione del rigore

Uno degli obiettivi che molti insegnanti si propongono è di portare i propri allievi alla comprensione e all'uso di un linguaggio matematico "rigoroso". Lodevole intenzione, in generale. Ma essa necessita di qualche chiarimento, al fine di evitare pericolosissimi malintesi: quando un'espressione matematica (ovvero: riguardante argomenti matematici) può essere considerata, in effetti, rigorosa? Insomma, che cosa significa "rigore"? E quale "rigore" possiamo e dobbiamo esigere dai nostri allievi?

⁴ Nello stesso lavoro, la ricercatrice francese suggerisce alcune attività per migliorare la capacità di lettura degli enunciati dei problemi:

- domandare agli allievi di risolvere problemi con dati superflui;
- domandare agli allievi di produrre un testo (ad esempio: un problema) destinato a dei compagni:
 - porre agli allievi domande sul contenuto di testi: una data informazione è presente? C'è un'informazione che ne implichi un'altra, o che la contraddica?
 - ricomporre un testo dato in più pezzi;
 - trovare la domanda di un problema di cui si dia una soluzione;
 - redigere alla maniera di questo o di quell'altro enunciato l'enunciato di un problema (Laborde, 1995).

Cercheremo di rispondere a queste (insidiose) domande esaminando innanzitutto la traccia di un problema, tratta da un libro di testo di geometria elementare utilizzato nelle scuole secondarie:

L'area di un trapezio isoscele è m^2 324 e la sua altezza è m 27. Calcolare le basi sapendo che la maggiore è tripla della minore.

Dedicheremo qualche pagina all'analisi approfondita di questo enunciato, apparentemente chiaro e corretto. Un suo attento esame, infatti fa sorgere qualche perplessità:

- | | |
|--|---|
| <p>I. <i>L'area... è m^2 324...</i></p> | <p>Come va espressa l'area?
Qual è il ruolo dell'unità di misura?</p> |
| <p>II. <i>Calcolare le basi...</i></p> | <p>Posso... “calcolare” dei segmenti?</p> |

Prima di procedere, ricordiamo alcune riflessioni sui concetti, continuamente impiegati proprio nelle questioni di geometria elementare, di segmento, di misura, di superficie, di area, di volume. Iniziamo dai segmenti. Com'è noto, è necessario distinguere tra:

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Segmento | <p><i>Figura geometrica
(parte di retta)</i></p> |
| <ul style="list-style-type: none"> • Estensione di un segmento
(spesso non considerata) | <p><i>Ciò che hanno in comune
più segmenti congruenti</i></p> |
| <ul style="list-style-type: none"> • Misura di un segmento | <p><i>Rapporto tra il segmento dato
e un segmento scelto come
unità di misura (non è necessario
ricorrere alle loro estensioni)</i></p> <p>Attenzione: la misura è dunque un numero puro e va espressa così:</p> <p style="text-align: center;">$\overline{AB} = 12$</p> <p>(rispetto al metro)</p> |

È importante osservare che, per i segmenti, congruenza ed equivalenza coincidono; ciò significa che il confronto di segmenti può avvenire anche senza considerare l'estensione.

Consideriamo ora le figure piane:

- | | |
|---|--|
| • Figura piana | <i>Figura geometrica
(parte di piano)</i> |
| • Estensione superficiale
(è fondamentale, nel caso
delle figure piane) | <i>Ciò che hanno in comune
più figure piane equivalenti
(ma non necessariamente
congruenti)</i> |
| • Area
(misura di una figura piana) | <i>Rapporto tra la figura data
e una figura scelta come
unità di misura (nel senso
dell'equivalenza: quindi
è il rapporto tra le loro
estensioni superficiali)</i>

<i>Attenzione: è un numero puro e
va dunque espressa così:</i>

$\text{Area(ABC)} = 12$

<i>(rispetto al metro quadrato)</i> |

Per le figure piane congruenza ed equivalenza non coincidono! Il confronto di figure piane non può avvenire senza considerare l'estensione.

Accenniamo infine, per amor di completezza, alle figure solide (sebbene il problema sopra considerato riguardi la geometria piana):

- | | |
|--|--|
| • Figura solida | <i>Figura geometrica
(parte di spazio)</i> |
| • Estensione spaziale
(fondamentale, nel caso
delle figure solide) | <i>Ciò che hanno in comune
più figure solide equivalenti
(ma non necessariamente
congruenti)</i> |
| • Volume
(misura di una figura solida) | <i>Rapporto tra la figura data
e una figura scelta come
unità di misura (nel senso
dell'equivalenza: quindi
è il rapporto tra le loro
estensioni spaziali)</i>

<i>Attenzione: è un numero puro e
va dunque espresso così:</i> |

$$\text{Volume(ABCDE)} = 60$$

(rispetto al metro cubo)

Per le figure solide, come per quelle piane, congruenza ed equivalenza non coincidono. Il confronto di figure solide non può avvenire senza considerare l'estensione.

Alla luce delle considerazioni precedenti, possiamo cercare di “correggere” la traccia inizialmente proposta, che riportiamo nuovamente:

L'area di un trapezio isoscele è m^2 324 e la sua altezza è m 27. Calcolare le basi sapendo che la maggiore è tripla della minore.

Questo enunciato, adesso, *non* ci sembra sufficientemente rigoroso. Ricordiamo infatti le nostre iniziali perplessità:

I. *L'area... è m^2 324...*

Qual è il ruolo dell'unità di misura?

La risposta, ora, appare semplice: l'area è una misura e quindi è un numero puro (un rapporto di grandezze omogenee): il numero che la esprime *non* deve dunque essere preceduto o seguito dall'unità di misura.

II. *Calcolare le basi...*

Posso... “calcolare” dei segmenti?

Evidentemente no: i segmenti sono *figure geometriche*. Possono essere calcolati dei numeri (ovvero, ad esempio, le *misure* delle figure), ma non delle figure geometriche!

Ecco dunque la nostra traccia “riveduta e corretta” (essa fa sempre riferimento a misure: esprimiamo anche l'altezza in termini di misura):

L'area di un trapezio isoscele è 324 rispetto al m^2 e la misura della sua altezza è 27 rispetto al m . Calcolare le misure delle basi sapendo che la maggiore è tripla della minore.

Bene, senza dubbio abbiamo fatto molti passi nella direzione di un linguaggio (pienamente?) “rigoroso”. Ma... che fatica! Le considerazioni precedenti sono state infatti dettate da uno sviluppo attento e preciso della

teoria, uno sviluppo che richiede evidentemente molta cautela e che coinvolge concetti anche piuttosto delicati⁵. E non possiamo dimenticare che tali osservazioni riguardano un ben limitato settore della matematica: distinzioni analoghe (se non addirittura più profonde) dovrebbero essere messe a punto *per ogni altro campo della matematica*, per ogni altro argomento.

Ma possiamo (dobbiamo) esigere dai nostri allievi una simile attenzione?

Non pretendiamo di dare una risposta secca, valida sempre e per tutti⁶. Per evitare equivoci, ripetiamo quanto affermato all'inizio di questo paragrafo: il tentativo di portare i propri allievi ad impiegare un linguaggio matematico "rigoroso" è una lodevole intenzione, è un obiettivo importante per ogni insegnante. Non intendiamo certamente avallare una pratica matematica linguisticamente scorretta o comunque approssimativa! Tuttavia ogni insegnante deve essere consapevole delle reali difficoltà che l'uso di questo linguaggio "rigoroso" comporta per l'allievo, difficoltà che si sovrappongono, spesso pesantemente, a quelle che la risoluzione di un problema già comporta (si veda: D'Amore & Plazzi, 1990).

Non dovremmo inoltre dimenticare che anche la storia della matematica ha visto una continua evoluzione del concetto di "rigore". Nota a tale proposito U. Bottazzini:

«Il rigore in matematica è anch'esso un concetto 'storico' e dunque in divenire... Appellarsi all'esigenza del rigore nello spiegare lo sviluppo della matematica sembra in realtà un discorso circolare: di fatto, alla formulazione di

⁵ In effetti, bisognerebbe distinguere fra:

① Grandezze di primo genere (esempi: segmenti, angoli piani, ...): la relazione di equivalenza coincide con quella di congruenza (coppie di grandezze equivalenti sono anche congruenti).

② Grandezze di secondo genere (esempi: poligoni, prismi, ...): la relazione di equivalenza coincide con quella di equiscomponibilità ma non con quella di congruenza (coppie di grandezze equivalenti sono equiscomponibili, ma esistono coppie di grandezze equivalenti non congruenti).

③ Grandezze di terzo genere (esempi: figure piane aventi contorni mistilinei, poliedri, ...): la relazione di equivalenza non coincide con quella di equiscomponibilità (esistono coppie di grandezze equivalenti non equiscomponibili) (Amaldi, 1900).

⁶ Ricordiamo ancora alcune considerazioni di U. Amaldi che riguardano l'argomento trattato nelle pagine precedenti: «È possibile sviluppare tutta la teoria elementare delle grandezze poligonali e poliedriche senza introdurre nessun nuovo postulato oltre quelli dell'*appartenenza*, dell'*ordinamento* e della *congruenza*. E si può anche notare che gli sviluppi a ciò necessari non sono più elevati, né più laboriosi di altre teorie che, per unanime consenso, sono considerate come accessibili alla maggioranza degli alunni delle scuole medie. Cionondimeno noi crediamo che un tale assetto della teoria non sia didatticamente raccomandabile. La concezione delle *superficie* e dei *volumi* quali *grandezze* è di una evidenza altrettanto spontanea, quanto ciascuna delle altre verità intuitive, che si sogliono assumere a postulati» (Amaldi, 1900).

nuovi *standard* di rigore si perviene quando i vecchi criteri non permettono una risposta adeguata alle domande che vengono dalla pratica matematica» (Bottazzini, 1981, p. 13).

E scrive il “rigorosissimo” N. Bourbaki:

«È da venticinque secoli che i matematici hanno l’abitudine di correggere i loro errori e vedere così la loro scienza arricchita, e non impoverita; ciò dà loro il diritto di guardare al futuro con serenità» (Bourbaki, 1963).

Ogni errore, dunque, può essere proficuamente corretto; anche qualche carenza di rigore può essere utilmente rilevata e, dopo un’adeguata motivazione, rettificata.

A ciascun insegnante spetta dunque il non facile compito di valutare attentamente il ruolo (meditato, equilibrato) da assegnare al rigore ed alla correttezza formale nell’ambito della propria programmazione, tra i propri obiettivi didattici. Rinunciare ad un’espressione corretta significa abbandonare un’importante aspetto, una fondamentale caratteristica della matematica. Fare dell’espressione formale il primissimo (o l’unico!) obiettivo del proprio insegnamento può rivelarsi altrettanto sbagliato e deleterio.

5.2.4. Il... “matematiche”

Prima di abbandonare l’importante e delicata questione del rigore, segnaliamo un rischio che una poco oculata gestione dell’argomento potrebbe comportare: l’impiego, da parte degli allievi, di un “linguaggio pseudo-matematico” costituito dall’accostamento di termini tratti da libri di testo, da espressioni utilizzate dall’insegnante nel corso delle spiegazioni; un accostamento, però, in parte o del tutto privo di significato. La nascita, insomma, di un terribile “matematiche”, di una vuota, inutile e dannosa accozzaglia di termini che nulla ha ormai a che fare con il benché minimo contenuto matematico.

Come è possibile che accada ciò? Semplice, purtroppo: l’allievo, magari in difficoltà nel corretto apprendimento di qualche contenuto matematico, cerca di imitare l’insegnante, cerca di rifarsi (almeno con qualche parola!) al libro di testo, con ciò sperando di “dare un’impressione positiva”, di ottenere quindi comunque l’agognata “sufficienza”. Abbiamo già visto qualcosa del genere nel capitolo precedente, dedicato al contratto didattico. L’allievo sembra pensare: il mio insegnante mi valuterà positivamente soltanto se riuscirò a fare ciò che lui mi chiede; ebbene, ciò che lui mi chiede (l’ho già constatato nelle spiegazioni, in altre interrogazioni, nel libro di testo che mi viene chiesto di utilizzare) è un “discorso” infarcito da “termini matematici”; pertanto non mi

resta che usare, comunque, questi benedetti termini, cercando di dare un tono altisonante alla mia esposizione.

Il risultato? Un completo disastro. L'apprendimento non migliora di certo, e al contempo i termini matematici, così banalizzati, perdono il loro significato e, dunque, la loro importanza. La preoccupazione di "dover usare un ben determinato linguaggio", nella mente già disorientata dell'allievo, si sovrappone all'esigenza di "capire": la situazione di confusione finisce dunque per peggiorare. E la stessa immagine della matematica, forse già debole nella concezione del povero studente, crolla. Definitivamente.

È evidente che non c'è più alcunché di corretto, di "rigoroso" in una situazione come quella ora descritta. Il disperato tentativo di utilizzare qualche termine "matematico" rincorrendo qualche definizione, qualche teorema, qualche dimostrazione non può essere considerato didatticamente utile, da alcun punto di vista⁷.

Non ci resta pertanto che ribadire quanto già anticipato nel paragrafo precedente, ovvero che la ricerca di un'espressione rigorosa dei contenuti matematici deve essere condotta con l'indispensabile prudenza⁸.

⁷ La questione è piuttosto complicata e non è certo esaurita in questa sede. Il lettore potrà consultare ad esempio: D'Amore, 1993b; Maier, 1993.

⁸ Non sarà inutile sottolineare che anche nei testi ministeriali proposti come traccia per la prova scritta degli esami di maturità rileviamo la presenza di qualche "infortunio formale" (si veda la ricerca riportata in appendice indicata con la lettera B). Limitandoci ai casi più recenti, troviamo ad esempio nella traccia proposta all'esame di maturità scientifica 1993, sessione ordinaria, l'assegnazione della qualifica di funzione ($x \rightarrow y$) ad una relazione ($x \rightarrow y$) espressa da $y = \pm f(x)$ (Bagni, 1993a). Più grave è la situazione della traccia della maturità scientifica 1995, sessione ordinaria, in cui leggiamo: «Nel cubo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H le facce ABCD e EFGH sono opposte ed i segmenti AE, BF, CG sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria. Sullo spigolo BF prendere un punto P tale che: $\overline{BP} = x$. a) Verificare che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa dalla seguente funzione: $y = \sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - x + 1)}$. b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti». Consideriamo il problema geometrico così descritto: l'appartenenza di P allo spigolo BF di "lunghezza unitaria", con $\overline{BP} = x$, impone la limitazione $0 \leq x \leq 1$: non ha alcun senso affermare (senza specificare il dominio!) che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa dalla $y = \sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - x + 1)}$. Sarebbe stato necessario indicare tale funzione precisandone il dominio, che *non* è tutto **R**. E la richiesta al punto (b) (di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, *dopo aver trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti*) diventa davvero problematica: non è facile considerare gli asintoti di una funzione continua definita nell'intervallo chiuso e limitato [0; 1]. Come la mettiamo, ad esempio, con il teorema di Weierstrass? (Bagni, 1995).

5.2.5. Dimostrare e convincere

Spesso, nei corsi scolastici di matematica e nei libri di testo (anche se questo aspetto non si riferisce alla scuola primaria), la dimostrazione viene considerata il momento essenziale dell'intera trattazione di una questione matematica, anche dal punto di vista didattico. Talvolta questa impostazione porta ad attribuire alla dimostrazione un ruolo preponderante: osserva F. Speranza che «siamo stati educati nell'ideale aristotelico-euclideo nel quale la matematica viene presentata secondo lo schema *enunciati-dimostrazioni*. Siamo arrivati a far coincidere con questo stile la *sostanza* della razionalità matematica» (Speranza, 1992, p. 135).

Non intendiamo negare l'importanza primaria della dimostrazione, sia per la ricerca sia nell'ambito della didattica disciplinare; eppure, nota ancora Speranza, «in quanto alla pratica matematica, le dimostrazioni sono solo una parte del lavoro (anche per i matematici 'puri'): essa è preceduta da una fase di intuizioni, di congetture, di tentativi che via via si perfezionano» (Speranza, 1992, p. 135).

Il ruolo di questa fase pre-dimostrativa, generalmente affidata a capacità di intuizione⁹ prima ancora che di organizzazione razionale della dimostrazione, è rilevante (Mazzanti & Piochi, 1990; Dapueto, 1992, p. 39), soprattutto se si considera che «la dimostrazione... non dà necessariamente il massimo convincimento» (Speranza, 1992, p. 137). Osserva E. Fischbein:

«*Capire intuitivamente* non significa semplicemente *vedere*... Dobbiamo considerare tre livelli di accettazione intuitiva. Un primo livello si riferisce al fatto espresso dall'affermazione stessa... Un secondo livello si riferisce alla struttura della dimostrazione: un allievo può capire intuitivamente il significato di un teorema ma può non essere in grado di capire intuitivamente la struttura della rispettiva dimostrazione (sebbene sia in grado di memorizzare e di capire formalmente i suoi passi)... Il terzo livello si riferisce al fatto di capire la

⁹ Sul significato del termine intuizione in ambito matematico, F. Furinghetti annota (riferendosi a Davis & Hersh, 1980, p. 391): «Il problema del significato dell'intuizione è prima di tutto glottologico... L'ambiguità e il mistero che circonda questo termine possono spiegarsi col fatto che nell'immagine comune la matematica è associata alla pura deduzione logica, per cui ogni fatto discende strettamente e 'fatalmente' dai precedenti; certi processi di acquisizione di nuova conoscenza (e, tra essi, in particolare, le scoperte/invenzioni matematiche) sembrano avvenire saltando alcuni anelli della catena di deduzioni e... creano la necessità di un elemento 'estraneo' (l'intuizione, appunto) che entri in gioco a spiegare ciò che è avvenuto» (Furinghetti, 1992, p. 85). Citiamo E. Fischbein: «La più diffusa interpretazione di intuizione è che l'intuizione è senso comune... Il fatto che questa identificazione è in parte corretta ha probabilmente bloccato gli interessi degli psicologi nello studio del fenomeno dell'intuizione» (Fischbein, 1993, p. 1).

validità universale dell'affermazione come garantita ed imposta dalla validità della dimostrazione» (Fischbein, 1993, p. 22).

Tali idee si riflettono sulla concezione e sul ruolo della dimostrazione:

«Formalmente non c'è differenza tra l'accettare la correttezza di una dimostrazione matematica e l'accettare l'universalità di un'affermazione come garantita da quella dimostrazione. Il fatto che, per l'allievo, ci sia differenza tra accettare una dimostrazione ed accettare l'universalità dell'asserto provato da essa dimostra che si può prendere in considerazione un elemento in più. Tale elemento aggiuntivo è costituito dal bisogno di un'accettazione intuitiva complementare della capacità predittoria assoluta di un'affermazione che è stata formalmente provata» (Fischbein, 1993, pp. 22-23; si veda anche: Lolli, 1989).

La dimostrazione è certamente una fase fondamentale dell'apprendimento della matematica; ma non bisogna dimenticare che non sempre essa è in grado di convincere pienamente l'allievo, di catturare la sua attenzione. Emotivamente, l'allievo può restare in parte o del tutto insensibile ad una "tradizionale" dimostrazione, mentre può essere affettivamente coinvolto, in termini spesso decisivi, da un'argomentazione più vicina all'esperienza, ad una procedura (praticamente) ripetibile, sebbene, forse, meno "rigorosa"¹⁰.

Ricordiamo un'osservazione di uno dei più importanti matematici contemporanei, Jacques Hadamard (1865-1963):

«Che un elemento affettivo sia parte di ogni scoperta o invenzione è sin troppo evidente, e molti pensatori vi hanno già insistito: è chiaro che nessuna scoperta o invenzione significativa può aver luogo senza la volontà di scoprire» (Hadamard, 1993).

A. Rogerson e M. Arora citano un'interessante annotazione di un non meglio precisato "collega giapponese":

¹⁰ La questione del rigore (anche dal punto di vista linguistico) è molto delicata. U. Bottazzini evidenzia la storicità di tale aspetto della matematica: «Il rigore in matematica è anch'esso un concetto 'storico' e dunque in divenire... Appellarsi all'esigenza del rigore nello spiegare lo sviluppo della matematica sembra in realtà un discorso circolare: di fatto, alla formulazione di nuovi *standard* di rigore si perviene quando i vecchi criteri non permettono una risposta adeguata alle domande che vengono dalla pratica matematica» (Bottazzini, 1981, p. 13). La questione è complessa e non può essere certo esaurita in poche battute; il lettore potrà consultare ad esempio: D'Amore, 1993; Maier, 1993a e 1993b; Zan, 1995; Pellerey & Orio, 1996.

«È importante fare ricerca matematica nella propria lingua, in quanto la ricerca coinvolge la persona intera, conoscenza e sentimenti, testa e cuore. Fare matematica in una lingua straniera è come impegnarsi in un incontro di pugilato tenendo una mano dietro la schiena» (citato in: Rogerson & Arora, 1995, p. 496).

Dunque il ruolo dell'aspetto affettivo si conferma fondamentale nell'apprendimento della matematica, particolarmente per quanto riguarda l'accettazione di fatti matematici (per l'allievo) sorprendenti, in aperto contrasto con «alcuni preesistenti frammenti pre-matematici» (e proprio la presenza di tali “frammenti” è una delle principali cause di misconcezioni: Davis & Vinner, 1986, pp. 298-300).

Concludiamo facendo nostra un'osservazione di F. Speranza, riferita primariamente al ruolo didattico della dimostrazione e dell'esperienza concreta in geometria (ma immediatamente estesa all'aritmetica e all'algebra):

«Molti insegnanti di matematica sono convinti che attraverso le dimostrazioni gli studenti imparino sia i ‘contenuti’ sia la ‘struttura logica’ della disciplina, e siano educati allo ‘spirito critico’. Almeno per la geometria, sono profondamente convinto che questa sia un'illusione. Anzitutto i ‘fatti spaziali’ si imparano per esperienza concreta (in certa misura, anche quella offerta dal metodo delle coordinate); del resto, anche altri settori, nei quali i fatti sono meno ‘palpabili’, come l'aritmetica e l'algebra, si apprendono anzitutto affrontando problemi, escogitando metodi di risoluzione» (Speranza, 1992, p. 136).

5.2.6. Quasi una conclusione

Al termine di questo capitolo una questione si presenterà spontaneamente all'attenzione del lettore: abbiamo constatato la possibile presenza di molti ostacoli che rendono difficoltoso (ed a volte, purtroppo, gravemente!) l'apprendimento; ebbene, alla luce di ciò, quale può essere il corretto atteggiamento di noi insegnanti? Come possiamo effettivamente ed efficacemente aiutare il nostro allievo in difficoltà? Come possiamo davvero migliorare il nostro insegnamento e, *soprattutto*, il suo apprendimento?

Ancora una volta non pretendiamo di dare una risposta assoluta a quella che può essere considerata una delle principali domande che un insegnante può porsi (e che spesso, in effetti, si pone). Molte volte, in questi appunti, abbiamo affermato che sarebbe presuntuoso e controproducente illudersi di fornire ricette universali.

Ma è importante sottolineare con forza alcuni elementi essenziali.

Tra questi, uno dei più importanti è la consapevolezza che, per moltissimi versi, l'apprendimento dei nostri allievi dipende inscindibilmente (anche) dalle caratteristiche del nostro insegnamento e dunque dalle nostre scelte. Anzi, insegnamento e apprendimento formano un complesso unitario; così come gli atteggiamenti dell'insegnante e dell'allievo, le attese, le richieste (sia esplicite che implicite) e le corrispondenti risposte sono strettamente collegate, regolate da quel sistema delicatissimo e intricato di clausole che abbiamo indicato con il termine "contratto didattico".

Non si insegna da soli ("a chi" si insegnerebbe?); così come, da soli, non si apprende: "da chi" si potrebbe apprendere? E "con chi"? Wittgenstein ribadisce che anche il più semplice "seguire una regola" non può ridursi ad una pratica privata (Wittgenstein, 1999). La dimensione sociale della didattica è basilare. Potrà sembrare, questa, un'osservazione banale; ma, a nostro avviso, non sarà mai abbastanza ricordata.

Riprendiamo inoltre alcune considerazioni espresse nell'Introduzione a questi appunti. Ribadiamo che il "saper insegnare" non deve essere considerato alla stregua di un'arte, di un incontrollabile "dono di natura"; e in modo del tutto analogo, anche l'importanza del "saper apprendere" va smitizzata. Certamente, in alcuni di noi insegnanti una qualche forma di predisposizione (forse) e l'esperienza (spesso) possono rendere facile o piacevole l'attività di insegnamento; analogamente, in questo o in quell'allievo si può manifestare una maggiore o minore predisposizione all'apprendimento della matematica. Ma attenzione: un proficuo insegnamento e un pieno apprendimento non sono mai determinati *esclusivamente* da una fortunata coincidenza, dal casuale incontro di due persone "speciali".

Come dobbiamo regolarci, dunque?

L'importante, per l'insegnante, per *ogni* insegnante, è innanzitutto... non perdere di vista la situazione. Mantenere il controllo della dialettica docente-discente, cercare sempre di sapere che cosa sta succedendo. E quindi riflettere costantemente sui perché, al fine di essere in grado, nei casi di difficoltà, di intervenire tempestivamente e di predisporre i correttivi opportuni¹¹. L'eventuale variazione delle nostre scelte didattiche non deve *mai* essere considerata una specie di sconfitta. Tutt'altro: è il fiore all'occhiello, per una didattica consapevole e responsabile.

L'insegnante, *ogni* insegnante, è un ricercatore.

Una corretta, viva, moderna ed efficace azione didattica nel campo della matematica (e analogamente accade, crediamo, per le altre discipline) non richiede doti eccezionali, rare o irraggiungibili capacità, non deve

¹¹ Se con il termine *metacognizione* intendiamo riferirci ad una riflessione sui processi di apprendimento, e con il termine *metarisoluzione* ad una riflessione su quanto fatto per risolvere un problema (come affermato nel capitolo 2), potremmo qui inventare termini come *metainsegnamento*.

obbligatoriamente basarsi soltanto su tecniche psicologiche iper-specialistiche, alla portata di pochi eletti. Ma, d'altro canto, non può più essere condotta esclusivamente confidando nell'aiuto del caro, vecchio "istinto": di ciò ogni docente deve essere consapevole.

Solo in questo modo, soltanto grazie a questa consapevolezza, l'insegnante saprà quotidianamente evitare il sorgere di malintesi, di incertezze, di misconcezioni. Saprà continuare ad essere, per il proprio allievo, maestro. Forse, non solo di matematica.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO 5

- Amaldi, U. (1900), Sulla teoria della equivalenza: Enriques, F. (a cura di) *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna (seconda edizione: 1912; terza edizione: 1924-1927; ristampa anastatica: 1983).
- Arrigo, G. & D'Amore, B. (1998), Ricerca in corso, titolo provvisorio: "Lo vedo ma non ci credo", *comunicazione privata all'autore*.
- Bagni, G.T. & D'Amore, B. (1992), Le classificazioni dei quadrilateri, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15, 785-814.
- Bagni, G.T. (1993a), Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1993: *Bollettino Mathesis Bologna*, 27, 15-16.
- Bagni, G.T. (1993b), Funzioni naturali di variabile reale: *La matematica e la sua didattica*, 4, 466-475, Bologna.
- Bagni, G.T. (1994), Continuità e discontinuità nella didattica dell'Analisi matematica: Piochi, B. (a cura di), *Atti del IV Incontro dei Nuclei di Ricerca Didattica nella Scuola Superiore*, IRRSAE Toscana, Siena.
- Bagni, G.T. (1995), Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1995: *La matematica e la sua didattica*, 4, 520-521.
- Bagni, G.T. & Giovannoni, L. (1996), Come è scritto l'enunciato di un problema?: *La Scuola Se*, 4, 16-18.
- Bagni, G.T. (1997), La visualizzazione nella didattica della matematica: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335.
- Bagni, G.T. (1998), *La scelta del contesto e il contratto didattico*, in via di pubblicazione.
- Bartolini Bussi, M. (1991), Apprendere la matematica attraverso la discussione: grafici nel piano cartesiano: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 14, 243-258.
- Bottazzini, U. (1981), *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino.
- Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano.

- Brousseau, G. (1983), Ostacoli epistemologici in matematica: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2.
- Brousseau, G. (1986), Fondamenti e metodi della didattica delle matematiche: *Recherches en didactique des mathématiques*, 7, 2, 33-115.
- Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Clemens, K. (1980), Analyzing children's errors on written mathematical tasks: *Educational studies in mathematics*, 11.
- D'Amore, B. (1986), Il ruolo della definizione nella didattica della matematica: *Insegnare*, 6, 9-13.
- D'Amore, B. & Plazzi, P. (1990), Intuizione e rigore nella pratica e nei fondamenti della matematica: *La matematica e la sua didattica*, IV, 3, 18-24.
- D'Amore, B. (1993), Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico: *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301.
- D'Amore, B. (1993a), *Problemi*, Angeli, Milano.
- D'Amore, B. (1993b), Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico: *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301.
- D'Amore, B. (1995), Lingue e linguaggi nella pratica didattica: Jannamorelli, B. (a cura di), *Atti del II Seminario internazionale di Didattica della Matematica di Sulmona, 'Lingue e linguaggi nella pratica didattica'*, 30 marzo-1 aprile 1995, Sulmona.
- D'Amore, B. (1996), *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi*, Opening Relation to Topic Group XIV "Infinite processes throughout the curriculum", 8th ICME, Sevilla, 14-21 July 1996 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335).
- D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.
- D'Amore, B. (1997), Bibliografia in progress sul tema: "l'infinito in didattica della matematica": *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.
- Daputo, C. (1992), La problematica del definire e del dimostrare nella costruzione di un progetto per l'insegnamento della matematica: Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del II Internucleo della Scuola secondaria superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 19-51.
- Davis R. & Vinner S. (1986), The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages: *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.
- Davis, P.J. & Hersh, R. (1980), *The mathematical experience*, Birkhäuser, Boston.

- Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.
- Duval, R. (1994a), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique: *Repres IREM*, 17.
- Duval, R. (1994b), Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage: *Actes de la Quarantesixieme Rencountre Internationale de la CIEAEM* (in via di pubblicazione).
- Duval, R. (1997), La compréhension des énoncés de problème de mathématisation: de la lecture à la résolution: D'Amore, B. & Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 25-46, Thessaloniki.
- Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A & Maccioni, L. (a cura di), UTET, Torino.
- Fischbein, E. (1983), Intuition and proof: *For the Learnong of Mathematics*, 3, 2, 9-24 (traduzione italiana di Copercini, L.: Intuizione e dimostrazione: Fischbein, E. & Vergnaud, G., 1992, *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*, Pitagora, Bologna, 1-24).
- Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Riedel, Dodrecht.
- Fischbein, E. (1993), The theory of figural concepts: *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Furinghetti, F. (1992), Luci ed ombre dell'approccio "intuitivo": Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del II Internucleo della Scuola secondaria superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 83-96.
- Gagatsis, A. (1995), Modi di valutazione della leggibilità dei testi matematici: *La matematica e la sua didattica*, 2, 136-146.
- Gagné, R.M. (1973), *Le condizioni dell'apprendimento*, Armando, Roma (prima edizione: 1970).
- Gelbaum, B.R. (1961), *Advanced calculus*, Appleton-Century-Crofts, New York.
- Gelbaum, B.R. (1962), *The real number system*, Appleton-Century Crofts, New York.
- Gelbaum, B.R. & Olmsted, J.M.H. (1979), *Controesempi in Analisi matematica*, Mursia, Milano.
- Glaeser, G. (1984), À propose des obstacles épistemologiques: réponse à Guy Brousseau: *Recherche en Didactique de la Mathématique*, 5.
- Goldin, G.A. & Caldwell, J. (1979), Syntax, contentand context variables examined in a research study: Goldin, G.A. & McClintock, C.E. (a cura di), *Task variables in mathematical problem solving*, Eric, Columbus.

- Hadamard, J. (1993), *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, Cortina, Milano.
- Johnson-Laird, P.N. (1988), *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna (prima edizione originale: 1983).
- Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3ème cycle, Université Paris 7, Paris.
- Kaldrimidou, M. (1995), Lo status della visualizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 2, 181-194.
- Laborde, C. (1995), Occorre imparare a leggere e scrivere in matematica?: *La matematica e la sua didattica*, 2, 121-135.
- Lolli, G. (1989), *Capire una dimostrazione*, Il Mulino, Bologna.
- Maier, H. (1993a), Conflit entre langage mathématique et langue quotidienne pour les élèves: *Cahier de didactique des mathématiques*, 3, 86-118 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1995, 298-305).
- Maier, H. (1993b), Problemi di lingua e comunicazione durante le ore di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.
- Mazzanti, G. & Piochi, B. (1990), Riflessioni sulla dimostrazione in didattica della matematica: *Didattica delle scienze e dell'informatica nella scuola*, 149, 45-50.
- Neubrand, M. (1990), L'apprendere e il riflettere: perché e come associarli nella didattica della matematica: *La matematica e la sua didattica*, IV, 2, 5-16.
- Paivio, A. (1986), *Mental representation: a dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford.
- Pellerey, M. (1991), Apprendere a pensare matematicamente: Resnick, L.B. & Ford, W.W., *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*, SEI, Torino.
- Pellerey, M. & Orio, F. (1996), La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica: *ISRE*, 2, 52-73.
- Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, I-II, Feltrinelli, Milano.
- Pontecorvo, C. (1981), Educazione e scuola di fronte alle differenze di intelligenza: AA.VV., *Intelligenza e diversità*, Loescher, Torino, 240-323.
- Priore, F. (1990), *Modelli, strumenti e misure nella didattica contemporanea*, Mursia, Milano.
- Prodi, G. (1970), *Analisi matematica*, Boringhieri, Torino.
- Rogerson, A. & Arora, M. (1995), La didattica della matematica verso il 21° secolo: *La matematica e la sua didattica*, 4, 491-508.
- Schoenfeld, A.H. (1986), On having and using geometric knowledge: Hiebert, J. (a cura di), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, 225-263, Erlbaum, Hillsdale.

- Shepard, R.N. (1980), *Internal representations: studies in perception imagery and cognition*, Bradford, Montgomery.
- Speranza, F. (1990), Controindicazioni al riduzionismo, *La matematica e la sua didattica*, IV, 3, 12-17.
- Speranza, F. (1992), La geometria nelle scuole superiori: dimostrazioni o progetto di razionalità: Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del II Internucleo della Scuola secondaria superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 135-141.
- Vergnaud, G.; Cortes, A. & Favre-Ortigue, P. (1997), Introduzione dell'algebra ai principianti "deboli". Problemi epistemologici e didattici: *La matematica e la sua didattica*, 3, 253-271.
- Vigotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1978).
- Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics: Harel, G. & Dubinsky, E. (a cura di), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213.
- Webb, N. (1979), Content and context variables in problem task: Goldin, G.A. & McClintock, C.E. (a cura di), *Task variables in mathematical problem solving*, Eric, Columbus.
- Whorf, B. (1970), *Linguaggio, pensiero e realtà*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1956).
- Wittgenstein, L. (1999), *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino.
- Zan, R. (1995), Chi non riesce in matematica?: D'Amore, B. (a cura di), *Insegnare ad apprendere la matematica in aula: situazioni e prospettive*, Atti del IX Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica", Castel San Pietro Terme, Pitagora, Bologna, 77-83.

