Ottimizzazione Fuzzy e programmazione matematica

Ing. Valerio Lacagnina

Introduzione

L'analisi e la modellazione di qualunque fenomeno o processo reale deve tenere conto del fattore incertezza. In molti casi tale incertezza non è dovuta ad aleatorietà ma a delle imprecisioni il cui trattamento formale non può essere realizzato nell'ambito della teoria matematica del calcolo delle probabilità. Tale imprecisione può essere data da:

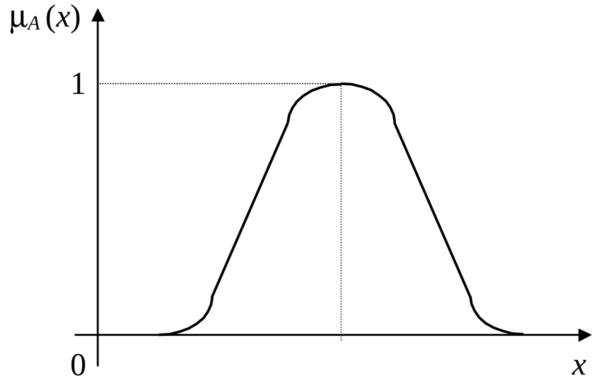
ambiguità, l'associazione di significati diversi ad uno stesso oggetto (ad es. ospite è sia colui che ospita sia colui che viene ospitato);
generalità, l'applicazione di un unico simbolo o significato ad una molteplicità di oggetti (es. piano vuol dire piatto, facile, agevole, sommesso, adagio, ma anche programma, pianoforte, superficie);
vaghezza, non preciso discernimento di un insieme di oggetti a cui il simbolo è associato (es. una variabile più o meno uguale ad otto).

Si noti che tutte le imprecisioni citate e la vaghezza possono essere viste come un effetto del linguaggio naturale usato dagli uomini. Nel 1965 Zadeh fornì i primi strumenti, ossia gli *insiemi fuzzy* (o fuzzy set), per gestire soprattutto l'imprecisione dovuta a vaghezza.

Definizioni di base

In matematica gli insiemi sono utilizzati per rappresentare formalmente un concetto. Per esempio i "numeri interi più grandi di 4 e più piccoli di 12" possono essere rappresentati dall'insieme A={5,6,7,8,9,10,11} o dalla *funzione caratteristica* $\varphi_A : X \rightarrow \{0,1\}$, dove la X è l'universo dei discorsi (l'insieme dei numeri interi) e la $\varphi_A(x) = 0$ se $x \notin A$.
Nel caso di rappresentazione di concetti vaghi sorgono alcune difficoltà: ad esempio rappresentare con un insieme e quindi una funzione caratteristica i numeri più o meno uguali ad 8 non è così semplice non potendo individuare una ben definita separazione fra gli elementi che appartengono all'insieme e quelli che non vi appartengono. Zadeh suggerì di rimpiazzare la funzione caratteristica con la *funzione di appartenenza*:

$\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ che associa ad ogni elemento dell'universo X il suo *grado* di appartenenza all'insieme fuzzy A, appartenente all'intervallo [0,1]. Quindi $\mu_A(x) = 0$ vuol dire che $x \notin A$, $\mu_A(x) = 1$ vuol dire che $x \in A$, mentre $0 < \mu_A(x) < 1$ indica che x appartiene parzialmente o in modo fuzzy ad A.
Per esempio si può utilizzare una funzione di appartenenza del tipo:



Si noti che la funzione di appartenenza è in effetti discreta, anche se qui è rappresentata in modo continuo. Inoltre la forma della funzione è soggettiva.

Facciamo un altro esempio. Si consideri l'insieme delle rose contenute in un giardino e il sottoinsieme delle rose rosse. Alcune rose apparterranno a tale sottoinsieme con certezza e avranno valore della funzione di appartenenza pari a 1, altre non vi apparterranno affatto con un valore pari a 0 (ad esempio le rose gialle) e altre ancora invece avranno una componente di colore rosso che tenderà al valore 1 della funzione di appartenenza quanto più tale colore è vicino al rosso puro. È chiaro che l'appartenenza fuzzy all'insieme delle rose rosse è del tutto soggettivo e riflette un ordinamento dell'universo rispetto al predicato vago.

Formalmente diamo la seguente **definizione**:

un *insieme fuzzy A* in un universo del discorso $X = \{x\}$, $A \underset{\sim}{\subseteq} X$, è definito da un'insieme di coppie

A = $\{ (\mu_A(x),x)\}$, $x \in X$, dove $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ è la funzione di appartenenza di A e $\mu_A(x)$ è chiamato grado di appartenenza di $x \in X$, in A.

Generalmente, per brevità, l'insieme fuzzy viene fatto coincidere con la funzione di appartenenza parlando indifferentemente di "insieme fuzzy A caratterizzato dalla funzione di appartenenza $\mu_A(x)$" o di "insieme fuzzy $\mu_A(x)$". Inoltre la coppia $(\mu_A(x),x)$ viene denotata con $\mu_A(x)/x$.

Si può introdurre la seguente notazione:

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + ... + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i \text{ , dove } |X| = n$$

$$\text{A} = \int_X \mu_A(x)/x \text{ , quando } X \text{ è un continuo}$$

e "+" e "Σ" sono utilizzati nel senso della teoria degli insiemi.

Per esempio l'insieme fuzzy A = 0.1/5 + 0.3/6 + 0.8/7 + 1/8 + 0.8/9 + 0.3/10 + 0.1/11.

Si definisce *supporto* di un insieme fuzzy $A \underset{\sim}{\subset} X$, l'insieme supp $A = \{ x \in X : \mu_A(x) > 0\}$.

Ad esempio se $X = \{2,4,6,8,10\}$ ed $A = 0.2/2 + 0.1/4 + 0/6 + 0/8 + 0.3/10$ il supp $A = \{2,4,10\}$.

Si definisce *l'insieme di livello* α (α-cut) di un insieme $A \underset{\sim}{\subset} X$, l'insieme $A_\alpha = \{ x \in X : \mu_A(x) > \alpha\}$.

Ad esempio se $X = \{1,3,5,7,9\}$ ed $A = 0/1 + 0.6/3 + 0.7/5 + 0.9/7 + 1/9$ allora $A_{0.5} = \{3,5,7,9\}$.

Si noti che supporto e α-cut sono insiemi convenzionali ossia non fuzzy.

Si definisce l'*altezza* di un insieme fuzzy $A \underset{\sim}{\subset} X$, il valore hgt($A$) = $\sup_{x \in X} \mu_A(x)$.

Ad esempio se $X = \{1,2,3,4,5\}$ ed $A = 0.3/1 + 0.5/2 + 0.6/3 + 1/4 + 0/5$ allora hgt(A) = 1. L'altezza indica in pratica la possibilità di trovare in X almeno un elemento che copre il predicato A esattamente.

Gli insiemi fuzzy sono dei veri e propri insieme e quindi la teoria degli insiemi viene ad esse applicata senza alcun problema.

Gli insiemi fuzzy A, $B \underset{\sim}{\subset} X$, sono detti *eguali*, scrivendo $A = B$, sse $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, per ogni $x \in X$.

Tale definizione sembra in contrasto con il carattere soft dei fuzzy. Infatti Bandler e Kohout (1980) introdussero un *grado di eguaglianza* suggerendo alcuni indici per misurarla.

Si dice che l'insieme fuzzy A è *sottoinsieme* o *contenuto* nell'insieme B, scrivendo $A \subseteq B$, sse $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, , per ogni $x \in X$. Anche in questo caso gli stessi autori introdussero un *grado di contenimento* e alcuni indici per misurarlo.

Operazioni e loro proprietà

Dati gli insiemi fuzzy A, $B \underset{\sim}{\subset} X$, vengono definite le seguenti operazioni:

unione: $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$ per ogni $x \in X$

intersezione: $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$ per ogni $x \in X$

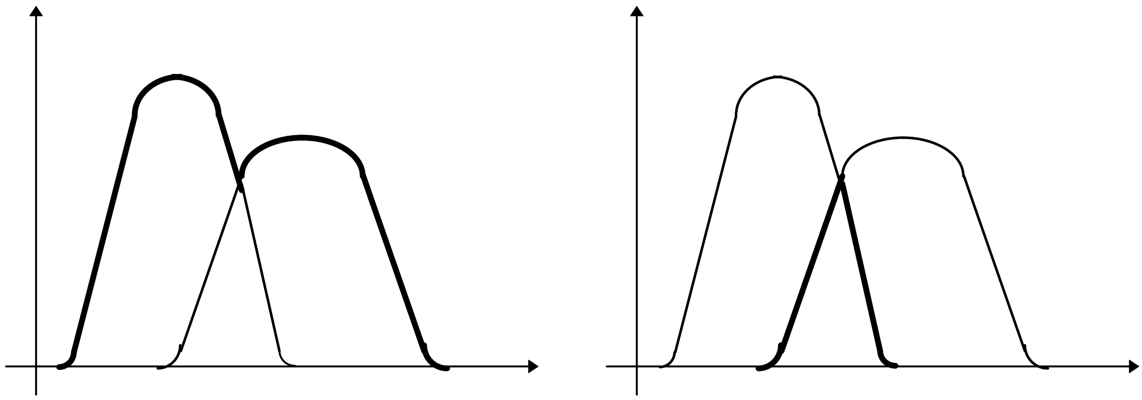
dove "$\vee$" e "$\wedge$" hanno il significato di massimo e minimo rispettivamente.

Esempio. Se $X = \{1,2,3,4,5\}$, $A = 0.2/1 + 0.4/2 + 0.2/3 + 0.5/4 + 0.8/5$ e $B = 0.3/1 + 0.6/2 + 1/3 + 0.1/4 + 0/5$, allora:

$A \cup B = 0.3/1 + 0.6/2 + 1/3 + 0.5/4 + 0.8/5$

$A \cap B = 0.2/1 + 0.4/2 + 0.2/3 + 0.1/4 + 0/5$

Graficamente l'unione e l'intersezione possono essere rappresentati nelle due figure



Unione Intersezione

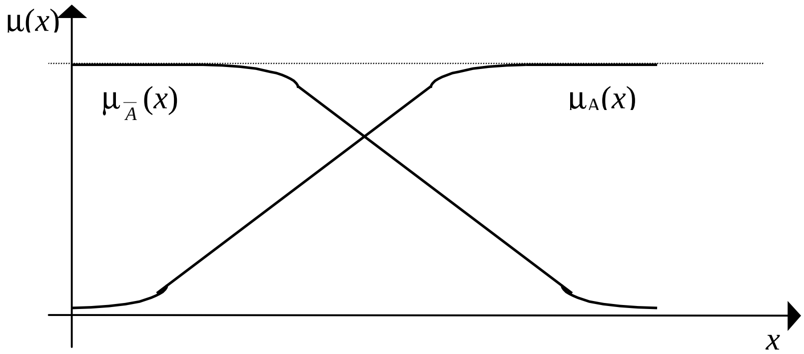
Il *complemento* di un insieme fuzzy $\overline{A} \subseteq X$, è definito come:

$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ per ogni $x \in X$

Esempio: se $X = \{1,2,3,4\}$ ed A = 0.8/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.1/4 allora il complemento di A è:

0.2/1 + 0.4/2 + 0.7/3 + 0.9/4.

Graficamente la complementazione è rappresentata in questo modo:



Relazioni fuzzy

Il concetto di relazione gioca un ruolo chiave in matematica. Questo è vero anche nel caso fuzzy.

Dati due universi (non fuzzy) X e Y, una relazione (binaria) fuzzy R è un insieme fuzzy nel prodotto cartesiano $X \times Y$:

$R = \{ (\mu_R(x,y)/ (y,x) \}$, per ogni $(x,y) \in X \times Y$

Il grado di appartenenza $\mu_R(x,y)$ può essere considerato una stima del valore della forza della relazione fra x e y.

Esempio. Se X = {Giovanni, Paolo, Michele} e Y = {Riccardo, Giuseppe} la relazione fuzzy R denominata con "*somiglianza*" può essere, ad esempio, definita come segue:

R = 0.5/(Giovanni, Riccardo) + 0.4/(Giovanni, Giuseppe) + 0.7/(Paolo, Riccardo) + 0.3/(Paolo, Giuseppe) + 0.9/(Michele, Riccardo) + 0.1/(Michele, Giuseppe)

Qualunque relazione fuzzy, su insiemi finiti, può essere rappresentata in forma matriciale. Nel caso dell'esempio:

	Riccardo	Giuseppe
Giovanni	0.5	0.4
Paolo	0.7	0.3
Michele	0.9	0.1

Anche le relazioni fuzzy possono essere composte. La composizione più importante è la cosiddetta *composizione max-min*. Date due relazioni fuzzy $R \underset{\sim}{\subset} X \times Y$, e $S \underset{\sim}{\subset} Y \times Z$, tale composizione, scritta come $R \circ S$, è definita come:

$\mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in Y}(\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z))$, per ogni $x \in X$, $z \in Z$.

Esempio. Se $X = \{1,3\}$, $Y = \{2,4,6\}$, $Z = \{1,2,3\}$,

$$R = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.9 & 0.6 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{vmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.8 \\ 0.4 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 1 & 0.3 \end{vmatrix}$$

$$\text{allora } R \circ S = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 & 0.6 \end{vmatrix}$$

ove ad esempio 0.2 è dato da max(min(0.2, 0.5), min(0.3, 0.2), min(0.1, 1)) (come da composizione cartesiana).

Il principio di estensione e i numeri fuzzy

Il *principio di estensione*, introdotto da Zadeh (1975), è uno dei più importanti e potenti strumenti nella teoria degli insiemi fuzzy. Tale principio risolve il seguente quesito:

Se esiste una qualche relazione fra entità non fuzzy, quale è l'equivalente in termini di entità fuzzy ?

L'importanza fondamentale del principio è quella di poter estendere modelli ed algoritmi che coinvolgono variabili non fuzzy al caso di variabili fuzzy.

Il principio di estensione può essere esplicitato nel modo seguente:

dati alcuni insiemi fuzzy $A_1 \underset{\sim}{\subset} X_1, \ldots, A_n \underset{\sim}{\subset} X_n$ e una funzione non fuzzy $f : X_1 \times \ldots \times X_n \rightarrow Y$, $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, l'immagine fuzzy $B \underset{\sim}{\subset} Y$ di $A_1, \ldots, A_n$, attraverso f, ha la seguente funzione di appartenenza:

$$\mu_B(y) = \max_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\in A_1\times\ldots\times A_n:\\ y=f(x_1,\ldots,x_n)}} \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(x_i), \text{ per ogni } y \in Y$$

Esempio. Se $X_1 = \{1,2,3\}$, $X_2 = \{1,2,3,4\}$, f è un'addizione, cioè $y = x_1 + x_2$, $A_1 = 0.1/1 + 0.6/2 + 1/3$ e $A_2 = 0.6/1 + 1/2 + 0.5/3 + 0.1/4$, allora

$B = A_1 + A_2 = 0.1/2 + 0.6/3 + 0.6/4 + 1/5 + 0.5/6 + 0.1/7$

L'esempio proposto riguarda un'area di applicazione molto importante del principio di estensione, l'algebra dei numeri reali.

Un *numero fuzzy* è definito come un normale insieme fuzzy convesso $A \underset{\sim}{\subset} R$, cioè un insieme fuzzy che soddisfa le due seguenti proprietà:

1. $\mu_A(x) = 1$, per almeno un $x \in R$
2. $\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_2)$, per ogni $x_1, x_2 \in R$ e $\lambda \in [0,1]$

Allora, se A e B sono due numeri fuzzy, $A, B \underset{\sim}{\subset} R$ con funzioni di appartenenza $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, le quattro operazioni aritmetiche di base, se $x, y, z \in R$, sono:

$$\mu_{A+B}(z) = \max_{x+y=z}(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$
$$\mu_{A-B}(z) = \max_{x-y=z}(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$
$$\mu_{A\bullet B}(z) = \max_{x\bullet y=z}(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$
$$\mu_{A/B}(z) = \max_{\substack{x/y=z\\ y\neq 0}}(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

Variabili linguistiche

Il *principio di incompatibilità* formulato da Zadeh (1973) dice:

Al crescere della complessità di un problema, gli strumenti matematici convenzionali hanno una sempre minore capacità di rappresentarli e di risolverli con precisione.

La soluzione suggerita dallo stesso autore porta all'utilizzo di una descrizione linguistica per fornire un semplice ma spesso adeguato strumento per descrivere anche i casi più complessi con la possibilità di una forte aggregazione dell'informazione.

Tale approccio viene detto *linguistico*, parte dalla nozione di *variabile linguistica*, ossia una variabile i cui valori non sono numeri ma parole o sentenze espresse in un linguaggio naturale o artificiale. Ad esempio, "piccolo", "alto", "circa 4", "di poco più piccolo di", sono valori di variabili linguistiche.

Nella teoria degli insiemi fuzzy, i valori delle variabili linguistiche sono eguagliati ad appropriati insiemi fuzzy. Per esempio, una variabile come "età" può essere vista come una variabile linguistica con valori nel cosiddetto *universo del discorso*, ad esempio U = {giovane, non giovane, molto giovane, non molto giovane, quasi giovane, etc.}, ed ognuno di questi valori può essere rappresentato da un sottoinsieme fuzzy dell'universo del discorso $X = [0, 120]$.

Generalmente i valori di tali variabili possono essere scritti utilizzando operatori di congiunzione/disgiunzione di termini primari, ad esempio "giovane" e "vecchio" nel caso della variabile "età".

Un problema fondamentale da risolvere è come caratterizzare una relazione (dipendenza) fra le variabili linguistiche. Di solito viene utilizzato una *proposizione condizionale fuzzy*. Per esempio, se L e K sono variabili linguistiche a valori in $A \underset{\sim}{\subseteq} X$ e $B \underset{\sim}{\subseteq} Y$ rispettivamente, allora una dipendenza fra L e K può essere data da una proposizione condizionale fuzzy del tipo:

SE ($L = A$) ALLORA ($K = B$), o, più brevemente SE A ALLORA B.

Di solito viene assunto SE A ALLORA $B = A \times B$ ossia eguagliando tramite il prodotto cartesiano dei due insiemi di valori, che è una relazione fuzzy.

Un problema conseguente all'introduzione delle proposizioni condizionali fuzzy è: se L assume un valore, quale è il valore di K implicato dalla dipendenza fra L e K ?

La risposta è fornita dalla regola di composizione di *inferenza*:

se $R \underset{\sim}{\subseteq} X \times Y$ è una relazione fuzzy che rappresenta una dipendenza fra L e K, con L a valori in A, allora il valore indotto di K è:

$\mu_B(y) = \max\limits_{x \in X}(\mu_A(x) \wedge \mu_R(x, y))$ per ogni $y \in Y$

che corrisponde alla composizione max-min.

Esempio. Sia definita la proposizione condizionale fuzzy

SE (L è "basso") ALLORA (K è "alto") = SE ("basso") ALLORA ("alto") = ("basso") $\times$ ("alto")

che, per "basso" = 1/1 + 0.7/2 + 0.3/3 ed "alto" = 0.2/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4, corrisponde a

$$R = (\text{“basso”}) \times (\text{“alto”}) = \begin{array}{cc} & Y \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ X \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{vmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.7 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{vmatrix} \end{array}$$

Se L = “medio” = 0.5/1 + 1/2 + 0.5/3, allora

$$K = (\text{“medio”}) \circ R = 0.2/1 + 0.5/2 + 0.7/3 + 0.7/4.$$

La programmazione matematica fuzzy: programmi lineari fuzzy

La formulazione di un problema di ottimizzazione contiene due elementi essenziali:

- un insieme di alternative ammissibili,
- una funzione obiettivo i cui valori servono per confrontare le alternative.

Sia la funzione obiettivo che l’insieme ammissibile potrebbe essere fuzzy.

Il tipico problema di programmazione matematica può essere scritto come:

$$\max_x f(x)$$

s.a.

$$g_i(x) \le b_i \qquad i = 1,2, \ldots, m$$

dove $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re^n$ è un vettore di variabili decisionali, $f : \Re^n \rightarrow \Re$ è una funzione obiettivo, $g_i : \Re^n \rightarrow \Re$ sono vincoli e $b_i \in \Re^n$ sono i termini noti detti anche RHS dall’inglese right-hand-sides.

Nel caso particolare di programmi lineari non fuzzy il problema può essere scritto come:

$$\max_x f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j \quad j = 1,2,\ldots,m \qquad (*)$$

$$x_i \ge 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Tale modello ha una rappresentazione di tipo “hard” ossia i valori delle variabili, dei parametri e dei termini noti hanno un significato univoco. Per rendere più soft il problema si può procedere lungo due linee principali. Si può *rilassare* il requisito rigido di massimizzare in modo stretto la funzione obiettivo e di soddisfare in modo stretto i vincoli. Si può permettere ai coefficienti, ossia c_i, a_{ij} e b_j, di essere numeri fuzzy.

Vediamo in breve il primo di questi due approcci.

Programmazione lineare fuzzy secondo Zimmermann

Il primo tentativo di rendere fuzzy un programma lineare è dovuto a Zimmermann (1975, 1976).

Per mostrare la sua essenza riscriviamo il sistema (*) come:

$$\min_x f(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j \quad j = 1,2,\ldots, m$$
$$x_i \ge 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

dove, evidentemente, $e_i = - c_i$.

La versione fuzzy del problema si può scrivere come:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} e_i x_i \lesssim Z \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \lesssim b_j \quad j = 1,2,\ldots, m \qquad\qquad (+) \\ &x_i \ge 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

che va letto in questo modo: la funzione obiettivo $f(x)$ dovrebbe essere *essenzialmente più piccola o uguale ad* un livello di aspirazione Z, e i vincoli (esclusi quelli di positività) dovrebbero essere *essenzialmente più piccoli o uguali ai* RHS b_i o, in altre parole, dovrebbero essere *possibilmente soddisfatti*. Le frasi precedenti in corsivo, esplicitate matematicamente con il simbolo "$\lesssim$", sono formalizzate nel modo seguente. Denotiamo con $H = [h_{ki}]$, $k = 1,2,\ldots,m+1$, $i = 1,2,\ldots,n$, la matrice ottenuta aggiungendo alla matrice $A = [a_{ij}]$ il vettore riga $[e_i]$ come prima riga di A. Denotiamo $(Hx)_k = \sum_{i=1}^{n} h_{ki} x_i$, e definiamo la funzione:

$$f_k((Hx)_k) = \begin{cases} 1 & \text{per } (Hx)_k \le w_k \\ 1 - \dfrac{(Hx)_k - w_k}{d_k} & \text{per } w_k < (Hx)_k \le w_k + d_k \\ 0 & \text{per } (Hx)_k > w_k + d_k \end{cases}$$

dove i w_k sono gli originali RHS b_j e il livello di aspirazione Z, ossia $w^T = (w_1,\ldots,w_{m+1})^T = (Z,b_1,\ldots, b_m)^T$, e i d_k sono alcuniie violazioni ammissibili dei vincoli scelte soggettivamente.

Vogliamo trovare una soluzione che soddisfi il sistema (+).

La nuova funzione obiettivo del programma lineare rilassato in termini fuzzy, ossia la *decisione fuzzy*, è

$$\mu_D(x) = \bigwedge_{k=1}^{m+1} f_k((Hx)_k)$$

e la soluzione $x^* = (x_1^*,\ldots, x_n^*)$ deve massimizzare la $\mu_D(x)$.

Sostituendo $w_k' = w_k / d_k$ e $(Hx)_k' = (Hx)_k / d_k$ la funzione obiettivo può essere riscritta:

$$\max_{x=(x_1,\ldots,x_n)} \bigwedge_{k=1}^{m+1} (w_k' - (Hx)_k') .$$

Negoita e Sularia (1976) dimostrarono che ciò è equivalente ad ottimizzare il seguente programma matematico:

$$\max_{\lambda\in[0,1]} \lambda$$

s.a.

$$\lambda \le w_k' - (Hx)_k' \qquad k = 1,2,\ldots,m+1 \qquad (-)$$
$$x_i \ge 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

ossia la soluzione ottima del programma (-) è ottima anche per il programma (+).

Si noti che utilizzando un programma lineare fuzzy il decisore non è forzato a definire il problema in termini precisi, come sarebbe richiesto da un approccio non fuzzy. Questo è sicuramente un vantaggio fondamentale.

L'approccio di Zimmermann ha trovato numerose applicazioni: nella progettazione della struttura e del numero di carrelli diun sistema industriale, nella progettazione di parcheggi, nella selezione dei media per la pubblicità, nel controllo dell'inquinamento atmosferico e nella determinazione di politiche per l'agricoltura.

Il modello può anche essere visto come un punto di partenza per alcune estensioni come nel caso del problema di trasporto. Inoltre sono state operati anche degli studi sulla dualità, sull'analisi di sensitività utilizzando programmi lineari parametrici.

L'approccio presentato può essere impiegato per problemi di programmazione lineare multiobiettivo. Si noti che in questo ultimo caso, in particolare, si possono sviluppare particolari approcci interattivi che consentono una discesa guidata nelle soluzioni anche in casi non lineari.

Distribuzioni di probabilità fuzzy e valore atteso fuzzy

Un insieme fuzzy P i cui elementi assumono valori nell'intervallo [0, 1] può essere espresso come una probabilità fuzzy. Si consideri un insieme di n probabilità fuzzy composte di r elementi:

$$p_i = \sum_{j=1}^{r} a_{i_j} / p_{i_j} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

dove a_{i_j} denota il grado di fiducia che un possibile valore di p_i sia p_{i_j}.

Allora (p_1, p_2, …, p_n) costituisce una distribuzione di probabilità fuzzy se e soltanto se esistono *ennuple* p_{i_j}, $i = 1, 2, \dots, n$, tali che $\sum_{i=1}^{n} p_{i_j} = 1$.

Per qualificare una distribuzione di probabilità fuzzy, ogni probabilità fuzzy nella distribuzione deve avere lo stesso numero di elementi (alcuni dei quali possono avere grado di fiducia pari a zero) e questi elementi devono essere ordinati nel senso che la somma degli elementi in una specifica posizione deve essere pari ad 1. Si noti che il grado di appartenenza degli elementi è arbitrario e non determina se la sequenza degli elementi dell'insieme fuzzy ordinato costituisce una distribuzione di probabilità fuzzy.

Sia (p_1, p_2, …, p_n) una distribuzione di probabilità fuzzy e sia (v_1, v_2, …, v_n) una corrispondente *ennupla* di valori fuzzy dove:

$$v_i = \sum_{k=1}^{s_i} b_{i_k} / v_{i_k} \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

È conveniente pensare ad una variabile casuale fuzzy V a valori fuzzy (v_1, v_2, …, v_n) con probabilità fuzzy (p_1, p_2, …, p_n). Allora il valore atteso fuzzy di V rispetto alla distribuzione di probabilità fuzzy P = (p_1, p_2, …, p_n) è dato da:

$$E(V) = \sum_{i=1}^{n} v_i p_i = \sum_{j=1}^{r} \left\{ \sum \sum \cdots \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in S} \min\left(a_{i_j},\dots,a_{n_j}, b_{i_{k(1)}},\dots,b_{n_{k(n)}}\right) / \sum_{i=1}^{n} p_{i_j} v_{i_{k(i)}} \right\} =$$
$$= \sum_{j=1}^{r} \left\{ \max_S \min\left(a_{i_j},\dots,a_{n_j}, b_{i_{k(1)}},\dots,b_{n_{k(n)}}\right) / \sum_{i=1}^{n} p_{i_j} v_{i_{k(i)}} \right\}$$

dove $\qquad S = \left\{ (k_1,\dots,k_n): \quad 1 \le k_i \le s_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}.$

Si noti che vi sono $s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n$ possibili *ennuple* nell'insieme di indici S definite per la $E(V)$. Inoltre, vi sono r elementi in ogni distribuzione di probabilità fuzzy. Teoricamente nel valore atteso fuzzy vi possono essere $T = r \prod_{i=1}^{n} s_i$ termini, ma in pratica questi saranno meno di T dato che se differenti combinazioni dei due vettori dati portano allo stesso valore atteso verrà preso uno solo di questi valori con il grado di appartenenza più elevato.

Applicazione della distribuzione di probabilità fuzzy

È stato realizzato da Shipley et al. un algoritmo chiamato BIFPET (*Bilief In Fuzzy Probabilities of Estimated Time*) adatto alla stima della durata delle attività in un progetto. Tale algoritmo combina l'incertezza degli esperti, che forniscono la stima di probabilità di durata pessimistica, possibile ed ottimistica, con il rischio dei responsabili di progetto di accettare tali stime come accurate e di utilizzarle per pianificare, schedulare e controllare il progetto. I supervisori delle attività possono avere qualche intuizione su quanto lunga possa essere la durata di una singola attività, ma non hanno alcun paragone statistico a priori su cui basare lo sviluppo o l'assunzione di una distribuzione di probabilità. La teoria della probabilità fuzzy elimina la necessità di tale informazione e l'algoritmo utilizza il fattore di giudizio umano per modellare più efficacemente il progetto da ottimizzare. L'algoritmo è il seguente:

1. Per ogni attività, A_i, si assegni la durata, t_{ki} (k = 1, 2, 3), definendo la durata ottimistica (t_{1i}), la durata possibile (t_{2i}) e la durata pessimistica (t_{3i}). Il tempo di completamento dell'attività, t_{Ai}, è dato da: $t_{Ai} = \sum_k \tau_{ki} / t_{ki}$ per tutte le A_i, dove $\tau_{ki} = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, m$ e $k = 1, 2, 3$)
2. Si definisca la probabilità fuzzy, Q_{A_ik}, per ogni A_i, in termini di ogni t_{ki} come:
$$Q_{A_ik} = \sum_j \alpha_{kij} / a_{kij} \qquad \text{per tutti i } t_{ki}$$
dove α_{kij} rappresenta il grado di fiducia nella probabilità a_{kij} che A_i verrà completata nel tempo t_{ki}
3. Si consideri tutti gli a_{kij} tali che $\Sigma_{k\in H}\, a_{kij} = 1$ per un qualche insieme H di k. Si assegni $a_{kij} = 0$ per $k \notin H$
4. Si calcoli:
$$b_{il} = \begin{cases} \sum_k a_{kij_k} t_{ki} & \text{se} \quad \sum_k a_{kij_k} = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (k = 1, 2, 3)$$
e $\qquad p$ = numeri distinti di $\sum_k a_{kij_k} = 1$, $1 \le l \le p$
5. Si determini $c_{il} = \min\{\tau_{ki}, \alpha_{kij}\}$ per tutti gli $\alpha_{kij} \neq 0$ dove c_{il} è il grado di fiducia che il valore atteso sia b_{il}
6. Defuzzyficare il tempo atteso dell'attività, ottenendo:
$$E(t_{Ai}) = \sum_l c_{il} b_{il} \Big/ \sum_l c_{il}$$

Il BIFPET si concentra sulla stima della durata delle attività di progetto, ma la sua metodica può essere generalizzata per stimare la distribuzione di probabilità e quindi il valore atteso di altri dati fondamentali per l'ottimizzazione dei progetti. Infatti, si può utilizzare tale metodica anche per stimare il costo iniziale o il flusso di cassa di una attività, o la quantità di risorsa utilizzata, o ancora il tasso di interesse da utilizzare nel fattore di sconto se le condizioni future sono incerte e lo stato dell'informazione è impreciso.

Esempio numerico

Si supponga di dover valutare la durata di una attività di progetto senza poter far riferimento ad una serie statistica sufficientemente ampia. L'équipe per valutare tale dato è formata dal responsabile di progetto e da tre tecnici sufficientemente esperti nel tipo di attività che deve essere effettuata. Invece di utilizzare una tecnica statistica per trattare le stime dei tecnici si preferisce utilizzare l'approccio BIFPET. Mediante una discussione diretta, i tre tecnici stabiliscono il valore ottimistico, possibile e pessimistico, della durata dell'attività (step 1), supponiamo 10, 13 e 18 giorni, rispettivamente:

$$t = 1/10+1/13+1/18.$$

I tecnici decidono individualmente la probabilità che ognuna di tali durate avvenga. A questo punto il responsabile di progetto assegna dei gradi di fiducia fuzzy a tali probabilità. Si ottengono le seguenti probabilità fuzzy per le durate dell'attività (step 2):

$Q_{10} = 0.3/0.6 + 0.5/0.3 + 0.7/0.4$
$Q_{13} = 0.4/0.6 + 0.6/0.8 + 0.3/0.2$
$Q_{18} = 0.9/0.2 + 0.3/0.4 + 0.8/0.3$

Il grado di appartenenza (fiducia) e le corrispondenti probabilità sono:

$\alpha_{11} = 0.3$	$\alpha_{12} = 0.5$	$\alpha_{13} = 0.7$	$a_{11} = 0.6$	$a_{12} = 0.3$	$a_{13} = 0.4$
$\alpha_{21} = 0.4$	$\alpha_{22} = 0.6$	$\alpha_{23} = 0.3$	$a_{21} = 0.6$	$a_{22} = 0.8$	$a_{23} = 0.2$
$\alpha_{31} = 0.9$	$\alpha_{32} = 0.3$	$\alpha_{33} = 0.8$	$a_{31} = 0.2$	$a_{32} = 0.4$	$a_{33} = 0.3$

Le possibili distribuzioni di probabilità (evento certo) sono (step 3):
(0.6, 0.2, 0.2), (0.6, 0, 0.4), (0.4, 0.6, 0), (0.4, 0.2, 0.4), (0, 0.6, 0.4), (0, 0.8, 0.2).

Si noti che ad esempio in (0.6, 0, 0.4), lo zero inserito indica che l'evento certo è ottenuto con solo le probabilità di 10 e 18 giorni, il che vuol dire, anche, che 13 giorni partecipa all'evento certo con probabilità 0.

A questo punto si può effettuare la misura pesata della durata (step 4) associata ad ognuna delle distribuzioni di probabilità:

$b_1 = 10 \cdot 0.6 + 13 \cdot 0.2 + 18 \cdot 0.2 = 12.2$

$b_2 = 10 \cdot 0.6 + 13 \cdot 0.0 + 18 \cdot 0.4 = 13.2$
$b_3 = 10 \cdot 0.4 + 13 \cdot 0.6 + 18 \cdot 0.0 = 11.8$
$b_4 = 10 \cdot 0.4 + 13 \cdot 0.2 + 18 \cdot 0.4 = 13.8$
$b_5 = 10 \cdot 0.0 + 13 \cdot 0.6 + 18 \cdot 0.4 = 15.0$
$b_6 = 10 \cdot 0.0 + 13 \cdot 0.8 + 18 \cdot 0.2 = 14.0$

Quindi può essere calcolato il grado di fiducia ottimistico, possibile e pessimistico della misura della durata (step 5):

$c_1 = \min \{0.3, 0.3, 0.9\} = 0.3$
$c_2 = \min \{0.3, 0.3, 0.3\} = 0.3$
$c_3 = \min \{0.7, 0.4, 0.4\} = 0.4$
$c_4 = \min \{0.7, 0.3, 0.3\} = 0.3$
$c_5 = \min \{0.3, 0.4, 0.3\} = 0.3$
$c_6 = \min \{0.6, 0.6, 0.9\} = 0.6$

c_2, c_3, c_5, e c_6, corrispondono alle rispettive misure pesate della durata dell'attività per le quali una di tali durate ha probabilità nulla di avverarsi. Per stabilire il valore del grado di appartenenza di tali probabilità nulle si è utilizzato il minimo del grado di appartenenza delle restanti due (che compongono l'evento certo). Naturalmente, il responsabile di progetto potrebbe scegliere un altro modo di assegnare tale grado di appartenenza dipendentemente dalla sua volontà. Tra l'altro se il responsabile di progetto non è convinto di alcune probabilità, può richiedere ai tecnici il motivo di tali scelte. In tal modo di solito possono essere apportate delle correzioni minime che eliminano la probabilità nulla per una delle durate.
Finalmente è possibile calcolare il valore fuzzy atteso della durata dell'attività (step 6):

$$E(t) = \frac{12.2 \cdot 0.3 + 13.2 \cdot 0.3 + 11.8 \cdot 0.4 + 13.8 \cdot 0.3 + 15 \cdot 0.3 + 14 \cdot 0.6}{0.3 + 0.3 + 0.4 + 0.3 + 0.3 + 0.6} = 13.35$$

ossia 13,35 giorni.

Bibliografia

Cammarata S., *Sistemi a logica fuzzy*, ETASLIBRI, 1997.
Mincoff N. and Takova D., *A Fuzzy Programming Model for Bank Assets and Liabilities Management*, XIVth Meeting of the EURO WG on Financial Modelling, 1993
Negoita C.V. and Sularia M., *On Fuzzy Programming and Tolerances in Planning*, Econ. Comp. And Econ. Cybern. Studies and Res., n. 1, pp. 3-15, 1976
Shipley M.F., De Korvin A., Omer K., *A Fuzzy Logic Approach for Determining Expected Values: A Project Management Application*, Journal of the Operational Research Society, 47, pp. 562-569, 1996
Zimmermann H.J., *Description and Optimization of Fuzzy Systems*, Int. J. Gen. Syst., n. 2, pp. 209-215, 1976